Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

Geometria Diferencial

2004/2005

Repescagem do 2º Teste - 21 de Janeiro de 2005 - 14h

Duração: 1 hora e 30 minutos.
Apresente todos os cálculos e justificações relevantes.

(5 val.) **1.** Mostre que $\mathbb{S}^4$, $\mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^1$ e $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2$ não são difeomorfas.

(5 val.) **2.** Calcule a cohomologia de de Rham de $\mathbb{R}^3 \setminus \mathbb{S}^1$, onde $\mathbb{S}^1 = \{(x,y,0) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1\}$.

(5 val.) **3.** Seja $\xi = (\pi, E, M)$ um fibrado vectorial de rank r com uma conexão ∇. Definimos uma distribuição D em E da seguinte forma: dado um aberto trivializante $U \subset M$ e um referencial local $\{s_1, \dots, s_r\} \subset \Gamma_U(E)$, D é dada em $\pi^{-1}(U)$ pela intersecção dos núcleos das formas

$$\theta^a = dv^a + \sum_{b=1}^{r} v^b {\omega_b}^a,$$

onde as funções diferenciáveis $v^a : \pi^{-1}(U) \to \mathbb{R}$ são as coordenadas lineares nas fibras associadas ao referencial local,

$$v_p = \sum_{a=1}^{r} v^a(v_p) s_a(p)$$

para todo o $v_p \in E_p$ e todo o $p \in U$. Mostre que D está bem definida (i.e., não depende da escolha de referencial), e é integrável **sse** ∇ é plana.

(5 val.) **4.** Mostre que as classes de Pontryagin totais de $T\mathbb{S}^4$, $T(\mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^1)$ e $T(\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2)$ satisfazem

$$p\left(T\mathbb{S}^4\right) = p\left(T(\mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^1)\right) = p\left(T(\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2)\right) = 1.$$