

Teorias de Gauge e Conexões em Fibrados Vectoriais

1 Relatividade e Electromagnetismo

A Teoria da Relatividade Especial identifica o espaço-tempo com \mathbb{R}^4 (com coordenadas Cartesianas $(x^0, x^1, x^2, x^3) = (t, x, y, z)$, onde t representa o tempo) munido da métrica pseudo-Riemanniana

$$g = -dt \otimes dt + dx \otimes dx + dy \otimes dy + dz \otimes dz$$

(**métrica de Minkowski**). As histórias de partículas materiais correspondem a curvas $c : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^4$ com $g(\dot{c}, \dot{c}) < 0$. Reparametrizando a curva se necessário, podemos assumir que $g(\dot{c}, \dot{c}) = -1$, caso em que o parâmetro τ da curva se diz o **tempo próprio** da partícula.

O **campo electromagnético** é uma 2-forma $F \in \Omega^2(\mathbb{R}^4)$. A equação do movimento de uma partícula de massa m e carga e no campo electromagnético é dada pela **lei de Lorentz**

$$m\ddot{c}^\# = -e(\dot{c} \lrcorner F),$$

onde $\#$ designa a habitual correspondência entre vectores e covectores determinada por g , \lrcorner designa a operação de contracção e o parâmetro é o tempo próprio τ . O campo electromagnético é suposto satisfazer as **equações de Maxwell**, que no vazio se escrevem

$$\begin{aligned} dF &= 0; \\ d^*F &= 0, \end{aligned}$$

onde $*$ é o operador estrela de Hodge determinado por g . Este é definido da seguinte forma: se $\{\alpha^1, \alpha^2, \alpha^3, \alpha^4\}$ é um co-referencial ortonormado positivamente orientado então

$$*\alpha^1 \wedge \dots \wedge \alpha^k = g(\alpha^1, \alpha^1) \dots g(\alpha^k, \alpha^k) \alpha^{k+1} \wedge \dots \wedge \alpha^4.$$

Exercício 1.1 Verifique que a lei de Lorentz é consistente com $g(\dot{c}, \dot{c})$ ser constante.

Exercício 1.2 É usual escrever (em unidades nas quais a permitividade eléctrica do vácuo é dada por $\epsilon_0 = 1$)

$$F = E^1 dx \wedge dt + E^2 dy \wedge dt + E^3 dz \wedge dt + B^1 dy \wedge dz + B^2 dz \wedge dx + B^3 dx \wedge dy,$$

onde

$$\mathbf{E} = (E^1, E^2, E^3)$$

é o **campo eléctrico** e

$$\mathbf{B} = (B^1, B^2, B^3)$$

é o **campo magnético**. Mostre que em termos destes campo a lei de Lorentz se escreve

$$m \frac{d^2 \mathbf{x}}{d\tau^2} = e \frac{dt}{d\tau} \mathbf{E} + e \frac{d\mathbf{x}}{d\tau} \times \mathbf{B},$$

onde $\mathbf{x} = (x, y, z)$ é o vector posição da partícula. Mostre ainda que as equações de Maxwell $dF = 0$ se escrevem

$$\begin{aligned}\operatorname{div} \mathbf{B} &= 0; \\ \operatorname{rot} \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t},\end{aligned}$$

enquanto que as equações de Maxwell $d^*F = 0$ se escrevem

$$\begin{aligned}\operatorname{div} \mathbf{E} &= 0; \\ \operatorname{rot} \mathbf{B} &= \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}.\end{aligned}$$

Exercício 1.3 Verifique que os seguintes campos electromagnéticos são soluções das equações de Maxwell:

1. Campo criado por uma partícula de carga e :

$$\mathbf{E} = \frac{e\mathbf{x}}{4\pi|\mathbf{x}|^3}, \quad \mathbf{B} = \mathbf{0}.$$

2. Campo criado por uma corrente eléctrica de intensidade I ao longo do eixo dos zz :

$$\mathbf{E} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{B} = \frac{I}{2\pi(x^2 + y^2)}(-y\mathbf{i} + x\mathbf{j})$$

(representamos por $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ os versores dos eixos coordenados).

3. Onda plana propagando-se ao longo do eixo dos xx :

$$\mathbf{E} = f(x - t)\mathbf{j}, \quad \mathbf{B} = f(x - t)\mathbf{k}$$

(com $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de classe C^1 qualquer).

2 Electromagnetismo como uma Teoria de Gauge

O campo electromagnético pode ser visto como a curvatura de uma conexão ∇ no fibrado de linha complexo trivial $L = \mathbb{R}^4 \times \mathbb{C}$, compatível com o produto interno Hermiteano canónico nas fibras. Efectivamente, a matriz da forma de conexão numa base ortonormada $s \in \Gamma(L)$ deverá ser anti-Hermiteana,

$$\omega_1^1 = iA$$

com $A \in \Omega^1(\mathbb{R}^4)$, pelo que a matriz da forma de curvatura será

$$\Omega_1^1 = d\omega_1^1 + \omega_1^1 \wedge \omega_1^1 = d\omega_1^1 = idA = iF$$

com $F \in \Omega^2(\mathbb{R}^4)$. O facto de que $F = dA$ garante que F satisfaz a primeira equação de Maxwell; esta é, aliás, equivalente à identidade de Bianchi $d_\nabla R = 0$, que neste caso se escreve

$$d\Omega_1^1 - \Omega_1^1 \wedge \omega_1^1 + \omega_1^1 \wedge \Omega_1^1 = 0 \Leftrightarrow d\Omega_1^1 = 0 \Leftrightarrow dF = 0.$$

Note que a lei de transformação da matriz da forma de curvatura garante que F não depende da escolha de base ortonormada. Por outro lado, uma mudança de base ortonormada (dita uma **transformação de gauge**) com matriz de mudança de base $e^{i\chi}$ (onde $\chi \in C^\infty(\mathbb{R}^4)$) faz com que a 1-forma A mude por adição de $d\chi$:

$$\omega_1^{\prime 1} = e^{-i\chi} \omega_1^1 e^{i\chi} + e^{-i\chi} d e^{i\chi} = \omega_1^1 + i d\chi \Rightarrow A' = A + d\chi.$$

O operador estrela de Hodge pode, claro está, ser estendido às formas diferenciais com valores nas secções de um fibrado, mediante

$$*(\omega \otimes s) = (*\omega) \otimes s.$$

Deste modo, as equações de Maxwell d^*F podem ser reescritas como

$$d_{\nabla}^*R = 0.$$

Para escrever a lei de Lorentz nesta linguagem necessitamos de introduzir o **estado interno** da partícula. Este é dado por uma secção ψ de $L \otimes L^*$ ao longo da história c da partícula, de modo a que $\psi(R)$ é uma 2-forma ao longo de c . Se $\sigma \in \Gamma(L^*)$ é o co-referencial dual de s , tem-se

$$\psi(\tau) = \alpha(\tau) s \otimes \sigma,$$

e portanto

$$\frac{D\psi}{D\tau} = \left(\frac{d\alpha}{d\tau} + \alpha \omega_1^1(\dot{c}) - \alpha \omega_1^1(\dot{c}) \right) s \otimes \sigma = \frac{d\alpha}{d\tau} s \otimes \sigma.$$

Deste modo, tomando $\alpha(0) = -ie$ e exigindo que o estado interno satisfaça

$$\frac{D\psi}{D\tau} = 0$$

obtemos $\alpha(\tau) = -ie$ e consequentemente

$$\psi(R) = (-ie s \otimes \sigma)(iF \sigma \otimes s) = eF.$$

Portanto a lei de Lorentz pode ser escrita na forma

$$m\ddot{c}^\sharp = -\dot{c} \lrcorner \psi(R);$$

$$\frac{D\psi}{D\tau} = 0$$

(**equação de Wong**). A escolha do estado interno num dado instante equivale a fixar a carga da partícula.

Exercício 2.1 A equação de Maxwell $dF = 0$ implica que $F = dA$ para alguma 1-forma $A \in \Omega^1(\mathbb{R}^4)$ (dita um **potencial vector**). Mostre que se escrevermos $A = -\phi dt + A^1 dx + A^2 dy + A^3 dz$ se tem

$$\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A};$$

$$\mathbf{E} = -\text{grad } \phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t},$$

onde $\mathbf{A} = (A^1, A^2, A^3)$.

Exercício 2.2 Mostre que uma transformação de gauge corresponde à substituição

$$\begin{aligned}\phi' &= \phi - \frac{\partial\chi}{\partial t}; \\ \mathbf{A}' &= \mathbf{A} + \text{grad } \chi.\end{aligned}$$

Verifique que esta substituição deixa os campos \mathbf{E} e \mathbf{B} invariantes.

Exercício 2.3 Use o facto de que a equação de onda com uma dada fonte $\rho \in C^\infty(\mathbb{R}^4)$

$$\text{lap } \chi - \frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2} = \rho$$

possui sempre solução para mostrar que é sempre possível encontrar um potencial vector satisfazendo

$$\text{div } \mathbf{A} + \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0$$

(**gauge de Lorentz**). Mostre que para este potencial vector as equações e Maxwell $d^*F = 0$ se reduzem às equações de onda

$$\begin{aligned}\text{lap } \phi - \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} &= 0; \\ \text{lap } \mathbf{A} - \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} &= 0.\end{aligned}$$

3 Formalismo Hamiltoniano

Recorde que um **Lagrangeano** é uma função $L : T\mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$. As **curvas de Euler-Lagrange** associadas a um Lagrangeano L são as soluções do sistema de EDOs

$$\frac{d}{d\tau} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\mu} \right) - \frac{\partial L}{\partial x^\mu} = 0.$$

Mostra-se facilmente que a lei de Lorentz pode ser obtida a partir do Lagrangeano

$$L = \frac{m}{2} g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu + e A_\mu \dot{x}^\mu = \frac{m}{2} g(\dot{c}, \dot{c}) + e A(\dot{c}),$$

onde estamos a usar a **convenção de Einstein** de assumir a existência de uma soma sobre índices repetidos. A **transformação de Legendre** é o morfismo de fibrados $T\mathbb{R}^4 \rightarrow T^*\mathbb{R}^4$ que associa ao vector tangente \dot{c} o **covector momento** p definido pelas suas coordenadas

$$p_\mu = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\mu} = m g_{\mu\nu} \dot{x}^\nu + e A_\mu,$$

ou seja,

$$p = m\dot{c}^\sharp + eA.$$

O **Hamiltoniano** é a função $H : T^*\mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$H = p(\dot{c}) - L.$$

No caso presente, facilmente se obtém que

$$H = \frac{1}{2m} g(p - eA, p - eA).$$

Exercício 3.1 Mostre que a lei de Lorentz pode ser obtida do Lagrangeano

$$L = \frac{m}{2}g(\dot{c}, \dot{c}) + eA(\dot{c}).$$

Exercício 3.2 Mostre que uma transformação de gauge altera o Lagrangeano para

$$L' = L + e d\chi(\dot{c}).$$

Mostre que L e L' determinam as mesmas equações do movimento.

Exercício 3.3 Mostre que o Hamiltoniano correspondente ao Lagrangeano acima é

$$H = p(\dot{c}) - L = \frac{1}{2m}g(p - eA, p - eA).$$

Exercício 3.4 Mostre que as equações de Euler-Lagrange são equivalentes às equações de Hamilton

$$\begin{cases} \dot{x}^\mu = \frac{\partial H}{\partial p_\mu} \\ \dot{p}_\mu = -\frac{\partial H}{\partial x^\mu} \end{cases}$$

Note que estas equações definem um fluxo em $T^*\mathbb{R}^4$.

4 Relações com Mecânica Quântica

Em Mecânica Quântica as partículas são descritas a partir de **funções de onda**, que satisfazem certas equações diferenciais parciais lineares. Estas equações, no caso da partícula livre, são obtidas escrevendo a relação entre a energia e o momento da partícula em questão e fazendo a substituição

$$p_\mu = -i\partial_\mu,$$

onde $p = m\dot{c} = (E, p^1, p^2, p^3)$ é o vector energia-momento da partícula (usamos unidades nas quais a constante de Planck satisfaz $\hbar = 1$). Assim, a relação clássica

$$E = \frac{\mathbf{p}^2}{2m}$$

fornece a **equação de Schrödinger**

$$i\frac{\partial\psi}{\partial t} = -\frac{1}{2m}\text{lap}\psi,$$

e a relação relativista

$$E^2 = \mathbf{p}^2 + m^2$$

fornece a **equação de Klein-Gordon**

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = \text{lap}\psi - m^2\psi,$$

que pode também ser escrita como

$$g^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu\psi - m^2\psi = 0 \quad \Leftrightarrow \quad *d*d\psi - m^2\psi = 0.$$

Em ambos os casos, a função ψ é uma função com valores em \mathbb{C} , podendo portanto ser vista como uma secção do fibrado L . A estrutura Hermiteana em L permite então calcular $|\psi|^2$, que é interpretado como a densidade de probabilidade de num dado instante encontrar a partícula numa dada posição. Por outro lado, a introdução do campo electromagnético, que no formalismo Hamiltoniano corresponde a substituir p por $p - eA$, é feita em Mecânica Quântica, por analogia, substituindo ∂_μ por $\partial_\mu - ieA_\mu$. Introduzindo em L a conexão ∇ compatível com a métrica Hermitiana cuja forma de conexão é

$$\omega_1^1 = -ieA$$

podemos então escrever a equação de Klein-Gordon para uma partícula de massa m e carga e como

$$g^{\mu\nu}\nabla_\mu\nabla_\nu\psi - m^2\psi = 0 \quad \Leftrightarrow \quad *d_\nabla^*d_\nabla\psi - m^2\psi = 0.$$

Esta equação substitui simultaneamente a lei de Lorentz e a equação de evolução do estado interno. Apesar de no caso quântico a carga eléctrica estar codificada na conexão, as equações de Maxwell escrevem-se da mesma forma $d_\nabla R = d_\nabla^*R = 0$.

Exercício 4.1 Mostre que $*d^*d\psi = g^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu\psi$.

Exercício 4.2 Escreva a equação de Schrödinger para uma partícula de massa m e carga e no campo electromagnético.

5 Teorias de Gauge Gerais

Podemos formular uma teoria de gauge geral considerando agora uma conexão ∇ no fibrado vectorial complexo de rank r trivial $E = \mathbb{R}^4 \times \mathbb{C}^r$, compatível com o produto interno Hermiteano canónico nas fibras. Portanto a matriz da forma de conexão numa base ortonormada $\{s_1, \dots, s_r\} \in \Gamma(E)$ deverá ser anti-Hermiteana, $\omega \in \mathfrak{u}(r)$. Nas teorias que encontram aplicação na física de partículas, exige-se ainda que esta conexão seja compatível com a orientação canónica $e_1 \wedge \dots \wedge e_r$, i.e. $\omega \in \mathfrak{su}(r)$ ¹.

A curvatura da conexão, que contém os campos de gauge, é suposta satisfazer, além da identidade de Bianchi $d_\nabla R = 0$, a **equação de Yang-Mills** $d_\nabla^*R = 0$. O análogo da lei de Lorentz é a **equação de Wong**, que se escreve

$$m\ddot{c}^\sharp = -\dot{c} \lrcorner \psi(R);$$

$$\frac{D\psi}{D\tau} = 0,$$

onde ψ é uma secção de $E \otimes E^*$ ao longo da história c da partícula, dita o seu **estado interno**, e desempenha o papel da carga. Quanticamente, a equação de Wong é substituída por uma equação de onda, por exemplo a **equação de Klein-Gordon**

$$*d_\nabla^*d_\nabla\psi - m^2\psi = 0,$$

¹Especificamente, o grupo de estrutura é $SU(2)$ para a **força nuclear fraca** e $SU(3)$ para a **força nuclear forte**. A força fraca age sobre electrões, neutrinos e quarks, e é responsável por certos processos radioactivos, como por exemplo o decaimento do neutrão; a força forte age apenas sobre quarks, e é responsável pelo agrupamento destes em prótons e neutrões, e pelo agrupamento destes últimos em núcleos estáveis. De notar que estas teorias descrevem processos que ocorrem a escalas muito pequenas, pelo que a equação de Wong, que descreve o limite clássico destas teorias, não tem qualquer utilidade neste contexto; a própria equação de Klein-Gordon não é utilizada directamente, mas sim a sua versão segundo-quantizada, de acordo com a Teoria Quântica de Campo.

onde a função de onda ψ é uma secção de E .²

Por exemplo, para $r = 2$ (que foi o caso inicialmente estudado por Yang e Mills), e usando a habitual identificação de $\mathfrak{su}(2)$ com os quaterniões puramente vectoriais, temos

$$\omega = A_1 \mathbf{i} + A_2 \mathbf{j} + A_3 \mathbf{k} = \mathbf{A}$$

com $A_1, A_2, A_3 \in \Omega^1(\mathbb{R}^4)$, donde

$$\Omega = d\omega + \omega \wedge \omega = d\mathbf{A} - \mathbf{A} \cdot \mathbf{A} + \mathbf{A} \times \mathbf{A} = d\mathbf{A} + \mathbf{A} \times \mathbf{A} = \mathbf{F}$$

(onde as operações entre vectores de formas se devem efectuar usando o produto exterior entre as componentes, pelo que $\mathbf{A} \cdot \mathbf{A} = A_1 \wedge A_1 + A_2 \wedge A_2 + A_3 \wedge A_3 = 0$). Esta equação implica a identidade de Bianchi, que nesta notação se escreve

$$d\mathbf{F} - \mathbf{A} \cdot \mathbf{F} + \mathbf{A} \times \mathbf{F} + \mathbf{F} \cdot \mathbf{A} - \mathbf{F} \times \mathbf{A} = \mathbf{0} \Leftrightarrow d\mathbf{F} + 2\mathbf{A} \times \mathbf{F} = \mathbf{0}.$$

A equação de Yang-Mills escreve-se

$$d^* \mathbf{F} + 2\mathbf{A} \times {}^* \mathbf{F} = \mathbf{0}.$$

Usando o produto interno Hermiteano canónico $\langle \cdot, \cdot \rangle$ para identificar E com E^* , podemos pensar no estado interno da partícula como uma secção de $E^* \otimes E$, que a equação de Wong e a compatibilidade de ∇ com $\langle \cdot, \cdot \rangle$ implicam ser transportada paralelamente ao longo de c :

$$\frac{d\psi}{d\tau} + 2\mathbf{A}(\dot{c}) \times \psi = \mathbf{0}.$$

A equação do movimento será então

$$m\ddot{c}^\# = -\dot{c} \lrcorner (\psi \cdot \mathbf{F}).$$

Exercício 5.1 Escreva a equação de Klein-Gordon para uma partícula num campo de Yang-Mills com grupo de estrutura $SU(2)$.

Exercício 5.2 Mostre que dado um quaterniões vectorial $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ qualquer,

$$\mathbf{A} = A \mathbf{v}$$

determina uma solução das equações de Yang-Mills com grupo de estrutura $SU(2)$ sse $A \in \Omega^1(\mathbb{R}^4)$ determina uma solução das equações de Maxwell (portanto a teoria de Yang-Mills com grupo de estrutura $SU(2)$ contém todas as soluções das equações de Maxwell como casos particulares). Verifique que neste caso a equação de Wong se reduz à lei de Lorentz.

²Note-se a aparente discrepância entre a formulação clássica (equação de Wong) e a formulação quântica (equação de Klein Gordon): enquanto que na primeira a partícula é descrita por uma secção de $E \otimes E^*$, na segunda ela é descrita por uma secção de E . Na realidade, dada uma secção paralelamente transportada de E , podemos sempre usar o produto interno Hermiteano para construir uma secção paralelamente transportada de $E \otimes E^*$, e apenas secções deste tipo representam o análogo clássico das partículas descritas pela equação de Klein-Gordon (**quarks** no caso de $SU(3)$); secções de $E \otimes E^*$ arbitrárias descrevem partículas mais gerais (**gluões** no caso de $SU(3)$). No caso de $SU(2)$ esta distinção não existe, uma vez que qualquer secção de $E \otimes E^*$ pode ser construída a partir de secções de E .

Exercício 5.3 Suponha que \mathbf{A} determina uma solução das equações de Yang-Mills com grupo de estrutura $SU(2)$. O que pode dizer acerca de $-\mathbf{A}$?

Exercício 5.4 Mostre que

$$\mathbf{A} = a(t)dx\mathbf{i} + b(t)dy\mathbf{j} + c(t)dz\mathbf{k}$$

determina uma solução das equações de Yang-Mills com grupo de estrutura $SU(2)$ sse as funções $a, b, c : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ satisfazem o sistema de EDOs não lineares

$$\begin{cases} \ddot{a} + 4a(b^2 + c^2) = 0 \\ \ddot{b} + 4b(a^2 + c^2) = 0 \\ \ddot{c} + 4c(a^2 + b^2) = 0 \end{cases} .$$

Mostre ainda que estas são as equações de Euler-Lagrange para o Lagrangeano

$$L = \frac{1}{2} (\dot{a}^2 + \dot{b}^2 + \dot{c}^2) - 2a^2b^2 - 2b^2c^2 - 2c^2a^2.$$

Qual seria o análogo destas soluções para as equações de Maxwell?

Exercício 5.5 O monopolo de Dirac corresponde ao campo electromagnético F dado por

$$\mathbf{E} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{B} = \frac{g\mathbf{x}}{4\pi|\mathbf{x}|^3}$$

(onde g é a carga magnética do monopolo). Na versão quântica, $-ieF$ é a matriz de curvatura de uma conexão num fibrado de linha complexo L sobre $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{S}^2$, onde e é a carga da partícula quântica. Mostre que a primeira classe de Chern deste fibrado é

$$c_1(L) = \frac{eg}{2\pi}[\mu],$$

onde $[\mu]$ é o gerador canónico de $H^2(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{S}^2) \cong H^2(\mathbb{S}^2)$. Sabendo que $c_1(L)$ é necessariamente um múltiplo inteiro de $[\mu]$, conclua que

$$eg = 2\pi n \quad (n \in \mathbb{Z}).$$

Por outras palavras, a existência de um monopolo magnético de carga $g \neq 0$ implica que a carga de qualquer partícula carregada deve ser um múltiplo inteiro de $\frac{2\pi}{g}$ (condição de quantização da carga eléctrica de Dirac).

Exercício 5.6 O monopolo de Wu-Yang é o campo de Yang-Mills com grupo de estrutura $SU(2)$ determinado por

$$\mathbf{A} = -\frac{1}{2|\mathbf{x}|^2}\mathbf{x} \times d\mathbf{x}.$$

Mostre que o campo de Yang-Mills é

$$\mathbf{F} = -\frac{1}{2|\mathbf{x}|^2}d\mathbf{x} \times d\mathbf{x} + \frac{1}{|\mathbf{x}|^4}(\mathbf{x} \cdot d\mathbf{x})(\mathbf{x} \times d\mathbf{x}) + \frac{\mathbf{x}}{4|\mathbf{x}|^4}\mathbf{x} \cdot (d\mathbf{x} \times d\mathbf{x}),$$

o seu dual é

$$*\mathbf{F} = -\frac{\mathbf{x}}{2|\mathbf{x}|^4}dt \wedge (\mathbf{x} \cdot d\mathbf{x}),$$

e verifique que se trata de uma solução das equações de Yang-Mills.

Exercício 5.7 Em Teoria Quântica de Campo surgem situações em que é necessário resolver as equações de Yang-Mills com grupo de estrutura $SU(2)$ relativas à métrica Euclidiana em \mathbb{R}^4 ,

$$g = dt \otimes dt + dx \otimes dx + dy \otimes dy + dz \otimes dz.$$

Neste caso, tem-se $**R = R$, e é possível obter soluções **auto-duais**, i.e. tais que $*R = R$ ³. A identidade de Bianchi implica então que as equações Yang-Mills se verificam. Mostre que, identificando \mathbb{R}^4 com os quaterniões \mathbb{H} e $\mathfrak{su}(2)$ com os quaterniões puramente vectoriais, a conexão determinada pela matriz

$$\omega(x) = \frac{x d\bar{x} - dx\bar{x}}{2(1 + |x|^2)}$$

possui curvatura auto-dual com matriz

$$\Omega(x) = \frac{dx \wedge d\bar{x}}{(1 + |x|^2)^2}.$$

Este campo de Yang-Mills diz-se o **instantão fundamental**.

Exercício 5.8 A esfera \mathbb{S}^4 pode ser dada por duas parametrizações $\phi_1^{-1}, \phi_2^{-1} : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{S}^4$, cuja função de transição é

$$y = \phi_2 \circ \phi_1^{-1}(x) = x^{-1}$$

(as cartas locais correspondentes são, a menos de reordenamento das coordenadas, as projecções estereográficas a partir dos dois pólos). Mostre que as formas locais

$$\omega = \frac{x d\bar{x} - dx\bar{x}}{2(1 + |x|^2)} \quad \text{e} \quad \theta = \frac{y d\bar{y} - dy\bar{y}}{2(1 + |y|^2)}$$

satisfazem

$$\theta = \left(\frac{x}{|x|} \right)^{-1} \omega \frac{x}{|x|} + \left(\frac{x}{|x|} \right)^{-1} d \left(\frac{x}{|x|} \right)$$

e portanto determinam uma conexão num certo fibrado vectorial E sobre \mathbb{S}^4 com grupo de estrutura $SU(2)$. Calcule a segunda classe de Chern $c_2(E)$, e conclua que este fibrado não é trivial.

³O mesmo não é verdade para a métrica de Minkowski, já que neste caso $**R = -R$.