

Geometria Diferencial

Ficha 4

A entregar até à aula teórica de 18/11/2004

1. Lição 13, Exercício 12. **Nota:** Assuma que $*$ é $C^\infty(M)$ -linear.
2. Lição 14, Exercício 1.
3. Lição 14, Exercício 8.
4. Lição 15, Exercício 4.
5. Lição 15, Exercício 6.
6. Seja M uma variedade diferenciável não orientável de dimensão d , e $p \in M$. Recorde que duas bases de T_pM se dizem ser **equivalentes** se a respectiva matriz de mudança de base possui determinante positivo. Seja \mathcal{O}_p o conjunto das (duas) classes de equivalência de bases de T_pM (as quais se designam por **orientações** de T_pM), e defina-se

$$\widetilde{M} = \{(p, O_p) : p \in M, O_p \in \mathcal{O}_p\}.$$

Dada uma parametrização $\varphi : U \subset \mathbb{R}^d \rightarrow M$, definimos a aplicação $\tilde{\varphi} : U \rightarrow \widetilde{M}$ através de

$$\tilde{\varphi}(x^1, \dots, x^d) = \left(\varphi(x^1, \dots, x^d), \left[\frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^d} \right] \right).$$

- (a) Mostre que \widetilde{M} é uma variedade diferenciável **orientável** de dimensão d .
 - (b) Mostre que a aplicação $\pi : \widetilde{M} \rightarrow M$ definida por $\pi(p, O_p) = p$ é uma aplicação de revestimento, *i.e.*, mostre que para cada $p \in M$ existe um aberto $U \ni p$ tal que $\pi^{-1}(U) = V_1 \cup V_2$, onde V_1, V_2 são abertos disjuntos e $\pi|_{V_i}$ é um difeomorfismo ($i = 1, 2$). (\widetilde{M} diz-se então o **revestimento duplo orientável** de M).
 - (c) Seja $\Phi : \widetilde{M} \rightarrow \widetilde{M}$ a aplicação definida por $\Phi(p, O_p) = (p, -O_p)$, onde $-O_p$ designa a orientação de T_pM contrária a O_p . Mostre que Φ é um difeomorfismo que inverte a orientação e satisfaz $\pi \circ \Phi = \pi$, $\Phi \circ \Phi = \text{id}$.
 - (d) Mostre que $\tilde{\omega} \in \Omega^k(\widetilde{M})$ satisfaz $\tilde{\omega} = \pi^*\omega$ para algum $\omega \in \Omega^k(M)$ sse $\Phi^*\tilde{\omega} = \tilde{\omega}$.
 - (e) Mostre que $H^d(M) = H_c^d(M) = 0$.
7. Lição 18, Exercício 1.
 8. Lição 18, Exercício 2.
 9. Lição 18, Exercício 5.