

Cálculo Diferencial e Integral II

Teste 1 (versão 2) - 13 de Abril de 2019 - 9:00

Duração: 90 minutos

Todos os cursos excepto LMAC e MEFT

Apresente e justifique todos os cálculos

1. Considere a função $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$g(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y^2}{x^2 + y^4} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

- [2,0] a) Indique em que pontos de \mathbb{R}^2 a função g é diferenciável.
- [1,0] b) Calcule $D_v g(0, 0)$ para um vector arbitrário $v \in \mathbb{R}^2$.
- [2,0] c) Calcule $\frac{\partial g}{\partial x}$ nos pontos $(x, y) \neq (0, 0)$.
- [2,0] d) Mostre que g não é de classe C^1 .
- [2,0] 2. Seja $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^2 e $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x, y) = g(3x + y, -3x + y)$.
Obtenha expressões para $\frac{\partial f}{\partial x}$ e $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ em função das derivadas parciais de g .
- [2,0] 3. Determine e classifique os pontos críticos da função $h(x, y) = -2x^2 - 9y + 3y^3$.
4. Considere o conjunto

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 < 4, x > 0, x < z < 4 - x\}.$$

Escreva uma expressão para o volume de A em termos de integrais iterados da forma:

- [2,0] (a) $\int(\int(\int dz)dy)dx;$
- [2,0] (b) $\int(\int(\int dy)dx)dz.$
- [2,0] 5. Considere uma bola em \mathbb{R}^3 de diâmetro $d > 0$ que é intersectada por um plano que a divide em dois conjuntos. Determine o volume de cada um destes conjuntos, sabendo que o plano passa a uma distância $D \geq 0$ do centro da bola.
- [3,0] 6. Seja $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua na origem e $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ a função definida por $g(x, y) = yf(x, y)$. Mostre que g é diferenciável na origem e calcule a sua derivada.