

Cálculo Diferencial e Integral II

Teste 1 (versão 1) - 13 de Abril de 2019 - 9:00

Duração: 90 minutos

Todos os cursos excepto LMAC e MEFT

Apresente e justifique todos os cálculos

1. Considere a função $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y^2}{x^4 + y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

[2,0] a) Indique em que pontos de \mathbb{R}^2 a função f é diferenciável.

Resposta: A função definida pela expressão $\frac{x^2 y^2}{x^4 + y^2}$ é um quociente de polinómios e por isso é diferenciável em todos os pontos do seu domínio. Portanto f é diferenciável em todos os pontos $(x, y) \neq (0, 0)$. As derivadas parciais na origem são

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x, 0) - f(0, 0)}{x} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) &= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{f(0, y) - f(0, 0)}{y} = 0 \end{aligned}$$

e portanto a matriz Jacobiana $Df(0, 0)$ existe e é a matriz nula. Logo, f é diferenciável na origem se e só se o seguinte limite existir e for igual a 0:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x, y) - f(0, 0) - Df(0, 0) \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y^2}{(x^4 + y^2) \sqrt{x^2 + y^2}}.$$

As desigualdades seguintes mostram que o limite é de facto 0, pois $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \sqrt{x^2 + y^2} = 0$:

$$\begin{aligned} 0 \leq \left| \frac{x^2 y^2}{(x^4 + y^2) \sqrt{x^2 + y^2}} \right| &= \frac{x^2 y^2}{(x^4 + y^2) \sqrt{x^2 + y^2}} \leq \frac{x^2 y^2}{y^2 \sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} \\ &\leq \frac{x^2 + y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \sqrt{x^2 + y^2}. \end{aligned}$$

Portanto f é diferenciável em \mathbb{R}^2 .

[1,0] b) Calcule $D_v f(0, 0)$ para um vector arbitrário $v \in \mathbb{R}^2$.

Resposta: Uma vez que f é diferenciável no ponto $(0, 0)$ e a matriz Jacobiana é nula, temos, para qualquer $v \in \mathbb{R}^2$,

$$D_v f(0, 0) = Df(0, 0)v = 0.$$

[2,0] c) Calcule $\frac{\partial f}{\partial y}$ nos pontos $(x, y) \neq (0, 0)$.

Resposta:

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{x^2 y^2}{x^4 + y^2} \right) = \frac{2x^2 y}{x^4 + y^2} - \frac{x^2 y^2}{(x^4 + y^2)^2} 2y = \frac{2x^2 y}{x^4 + y^2} - \frac{2x^2 y^3}{(x^4 + y^2)^2}.$$

[2,0] d) Mostre que f não é de classe C^1 .

Resposta: A restrição à curva $y = x^2$ da função $\frac{\partial f}{\partial y}$ nos pontos $(x, y) \neq (0, 0)$ pode ser descrita como a seguinte função de $x \neq 0$:

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, x^2) = \frac{2x^4}{x^4 + x^4} - \frac{2x^8}{(x^4 + x^4)^2} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

Por outro lado, como vimos acima, $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0 \neq \frac{1}{2}$, e portanto a função $\frac{\partial f}{\partial y}$ não é contínua no ponto $(0, 0)$. Uma vez que pelo menos uma das derivadas parciais de f não é contínua, conclui-se que f não é de classe C^1 .

[2,0] 2. Sejam $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^2 e $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $g(x, y) = f(x + 2y, x - 2y)$.

Obtenha expressões para $\frac{\partial g}{\partial y}$ e $\frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y}$ em função das derivadas parciais de f .

Resposta: Fazendo $f \equiv f(u, v)$ e usando a regra da cadeia obtemos

$$\frac{\partial g}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial}{\partial y}(x + 2y) + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial}{\partial y}(x - 2y) = 2 \frac{\partial f}{\partial u} - 2 \frac{\partial f}{\partial v}$$

e portanto

$$\frac{\partial g}{\partial y}(x, y) = 2 \frac{\partial f}{\partial u}(x + 2y, x - 2y) - 2 \frac{\partial f}{\partial v}(x + 2y, x - 2y).$$

Logo,

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial g}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(2 \frac{\partial f}{\partial u} - 2 \frac{\partial f}{\partial v} \right) = 2 \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial u} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial v} \right) \right] \\ &= 2 \left(\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 f}{\partial v \partial u} \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} \frac{\partial v}{\partial x} \right) \\ &= 2 \left(\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial v \partial u} - \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} - \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} \right) = 2 \left(\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} \right) \end{aligned}$$

e portanto

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y}(x, y) = 2 \frac{\partial^2 f}{\partial u^2}(x + 2y, x - 2y) - 2 \frac{\partial^2 f}{\partial v^2}(x + 2y, x - 2y).$$

[2,0] 3. Determine e classifique os pontos críticos da função $f(x, y) = 3x - x^3 - 2y + y^2$.

Resposta: A matriz Jacobiana de f é

$$Df = \begin{bmatrix} 3 - 3x^2 & -2 + 2y \end{bmatrix}$$

e por isso os pontos críticos são $(-1, 1)$ e $(1, 1)$, que são as soluções do sistema

$$\begin{cases} 3 - 3x^2 = 0 \\ -2 + 2y = 0 \end{cases}$$

A matriz Hessiana é

$$D^2f = \begin{bmatrix} -6x & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

e nos pontos críticos temos

$$D^2f(-1, 1) = \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad D^2f(1, 1) = \begin{bmatrix} -6 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

A matriz $D^2f(-1, 1)$ é definida positiva porque os valores próprios são ambos positivos (coincidem com as entradas da diagonal principal, uma vez que a matriz é diagonal) e portanto $(-1, 1)$ é um ponto de mínimo.

A matriz $D^2f(1, 1)$ é indefinida (pois os valores próprios têm sinais diferentes) e portanto $(1, 1)$ é um ponto de sela.

4. Considere o conjunto

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 < 4, y > 0, y < z < 4 - y\}.$$

Escreva uma expressão para o volume de A em termos de integrais iterados da forma:

[2,0] (a) $\int(\int(\int dz)dy)dx;$

Resposta: $V_3(A) = \int_{-2}^2 \left(\int_0^{\sqrt{4-x^2}} \left(\int_y^{4-y} 1dz \right) dy \right) dx.$

[2,0] (b) $\int(\int(\int dx)dy)dz.$

Resposta: $V_3(A) = \int_0^2 \left(\int_0^z \left(\int_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} 1dx \right) dy \right) dz + \int_2^4 \left(\int_0^{4-z} \left(\int_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} 1dx \right) dy \right) dz.$

[2,0] 5. Considere um plano em \mathbb{R}^3 que intersecta uma bola de raio $R > 0$, dividindo-a em dois subconjuntos. Sabendo que o plano passa a uma distância $d \geq 0$ do centro da bola, determine o volume de cada um destes subconjuntos.

Resposta: Podemos assumir sem perda de generalidade que o centro da bola é a origem e que o plano é o plano $z = d$. Em coordenadas cilíndricas, o volume do subconjunto da bola acima do plano é então dado por

$$\begin{aligned} V_+(d) &= \int_0^{2\pi} \int_d^R \int_0^{\sqrt{R^2-z^2}} \rho \, d\rho \, dz \, d\varphi = \pi \int_d^R (R^2 - z^2) \, dz \\ &= \pi \left(R^2(R - d) - \frac{R^3}{3} + \frac{d^3}{3} \right) = \frac{\pi}{3} (2R^3 - 3R^2d + d^3). \end{aligned}$$

Note-se que, como seria de esperar, $V_+(R) = 0$ e $V_+(0) = \frac{2}{3}\pi R^3$. O volume do subconjunto da bola abaixo do plano será então

$$V_-(d) = \frac{4}{3}\pi R^3 - V_+(d) = \frac{\pi}{3} (2R^3 + 3R^2d - d^3).$$

Como seria de esperar, $V_-(d) = V_+(-d)$.

[3,0] 6. Seja $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua na origem e $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ a função definida por $g(x, y) = xf(x, y)$. Mostre que g é diferenciável na origem e calcule a sua derivada.

Resposta: As derivadas parciais de g na origem são

$$\frac{\partial g}{\partial x}(0, 0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x, 0) - g(0, 0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{xf(x, 0)}{x} = f(0, 0)$$

(uma vez que f é contínua na origem) e

$$\frac{\partial g}{\partial y}(0,0) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{g(0,y) - g(0,0)}{y} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{0}{y} = 0.$$

Logo, g é diferenciável na origem se e só se o seguinte limite existir e for igual a 0:

$$\begin{aligned} & \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{g(x,y) - g(0,0) - Dg(0,0) \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}}{\sqrt{x^2 + y^2}} \\ &= \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xf(x,y) - \begin{bmatrix} f(0,0) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}}{\sqrt{x^2 + y^2}} \\ &= \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x(f(x,y) - f(0,0))}{\sqrt{x^2 + y^2}}. \end{aligned}$$

Uma vez que

$$\left| \frac{x(f(x,y) - f(0,0))}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right| \leq \frac{|x|}{\sqrt{x^2 + y^2}} |f(x,y) - f(0,0)| \leq |f(x,y) - f(0,0)|$$

e f é contínua na origem, o limite é de facto zero, e portanto g é diferenciável na origem.