

Resumo dos resumos de CDI-II

1. Topologia e Continuidade de Funções em \mathbb{R}^n

1. Limites direccionais: Se

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x, mx)$$

não existe, ou existe mas depende de m , então

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$$

não existe.

2. Produto de uma função limitada por um infinitésimo:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} = 0$$

porque $y \rightarrow 0$ e

$$\left| \frac{x^2}{x^2 + y^2} \right| \leq 1.$$

3. Teorema Weierstrass: Se $A \subset \mathbb{R}^n$ é compacto e $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua então f tem máximo e mínimo em A .

2. Cálculo Diferencial em \mathbb{R}^n

1. Derivada de $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ segundo o vector $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ no ponto $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$:

$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{v}}(\mathbf{a}) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\mathbf{f}(\mathbf{a} + h\mathbf{v}) - \mathbf{f}(\mathbf{a})}{h}.$$

2. Derivada parcial:

$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x_i}(\mathbf{a}) = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{e}_i}(\mathbf{a}).$$

3. $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ é diferenciável em \mathbf{a} se

$$\lim_{\mathbf{h} \rightarrow 0} \frac{\mathbf{f}(\mathbf{a} + \mathbf{h}) - \mathbf{f}(\mathbf{a}) - D\mathbf{f}(\mathbf{a}) \cdot \mathbf{h}}{\|\mathbf{h}\|} = \mathbf{0},$$

onde $D\mathbf{f}(\mathbf{a})$ é a matriz Jacobiana:

$$D\mathbf{f}(\mathbf{a}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{bmatrix}.$$

4. f diferenciável em $\mathbf{a} \Rightarrow f$ contínua em \mathbf{a} .
5. f diferenciável em $\mathbf{a} \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}(\mathbf{a}) = Df(\mathbf{a}) \cdot \mathbf{v}$.
6. $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ é de **classe** C^1 se todas as suas derivadas parciais $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$ são funções contínuas.
7. $f \in C^1 \Rightarrow f$ diferenciável.
8. **Derivada da composta:**

$$D(g \circ f)(\mathbf{a}) = Dg(f(\mathbf{a}))Df(\mathbf{a}).$$

9. **Regra da cadeia:**

$$\frac{\partial (g_i \circ f)}{\partial x_j} = \sum_{k=1}^m \frac{\partial g_i}{\partial y_k} \frac{\partial f_k}{\partial x_j}.$$

10. **Gradiente:**

$$\text{grad } f \equiv \nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right).$$

3. Fórmula de Taylor e Extremos

1. **Lema de Schwarz:** Se $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ é de classe C^2 então

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i},$$

ou seja, a **matriz Hessiana**

$$Hf = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{bmatrix}$$

é simétrica.

2. Se $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ tem um extremo local em $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ então $Df(\mathbf{a}) = 0$ (\mathbf{a} é um **ponto crítico**, ou **ponto de estacionaridade**).
3. $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^2 , $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ um ponto crítico de f . Se $Hf(\mathbf{a})$ é:
 - (i) **definida positiva** (todos os v.p. > 0) então \mathbf{a} é um ponto de **mínimo local**;
 - (ii) **definida negativa** (todos os v.p. < 0) então \mathbf{a} é um ponto de **máximo local**;
 - (iii) **indefinida** (existem v.p. > 0 e v.p. < 0) então \mathbf{a} é um **ponto de sela**.

4. Cálculo Integral em \mathbb{R}^n

1. **Teorema de Fubini:**

$$\int_{I \times J} f = \int_I \left(\int_J f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) dV_m(\mathbf{y}) \right) dV_n(\mathbf{x}) = \int_J \left(\int_I f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) dV_n(\mathbf{x}) \right) dV_m(\mathbf{y}).$$

2. **Teorema de mudança de variáveis:**

$$\int_{\mathbf{g}(U)} f = \int_U (f \circ \mathbf{g}) |J\mathbf{g}|.$$

3. **Coordenadas polares:** $\mathbf{g} :]0, +\infty[\times]0, 2\pi[\rightarrow \mathbb{R}^2$

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases}, \quad J\mathbf{g}(r, \theta) = r.$$

4. **Coordenadas cilíndricas:** $\mathbf{g} :]0, +\infty[\times]0, 2\pi[\times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$

$$\begin{cases} x = \rho \cos \varphi \\ y = \rho \sin \varphi \\ z = z \end{cases}, \quad J\mathbf{g}(\rho, \varphi, z) = \rho.$$

5. **Coordenadas esféricas:** $\mathbf{g} :]0, +\infty[\times]0, \pi[\times]0, 2\pi[\rightarrow \mathbb{R}^3$

$$\begin{cases} x = r \sin \theta \cos \varphi \\ y = r \sin \theta \sin \varphi \\ z = r \cos \theta \end{cases}, \quad J\mathbf{g}(r, \theta, \varphi) = r^2 \sin \theta.$$

6. Dada uma **função densidade de massa** $\rho : A \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^+$ define-se:

(i) O **volume** de A :

$$V_3(A) = \int_A 1.$$

(ii) A **massa** de A :

$$M = \int_A \rho.$$

(iii) A coordenada x do **centro de massa** de A :

$$\bar{x} = \frac{1}{M} \int_A \rho x$$

(analogamente para \bar{y}, \bar{z} ; fazendo $\rho = 1$ obtém-se o **centróide**).

(iv) O **momento de inércia** de A em relação ao eixo dos zz :

$$I_z = \int_A \rho (x^2 + y^2)$$

(analogamente para I_x, I_y).

7. **Regra de Leibnitz:**

$$\frac{d}{dt} \int_I f(\mathbf{x}, t) dV_n(\mathbf{x}) = \int_I \frac{\partial f}{\partial t}(\mathbf{x}, t) dV_n(\mathbf{x}).$$

5. Função Inversa e Função Implícita

1. **Teorema da Função Inversa:** $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ C^1 , $Jf(\mathbf{a}) \neq 0$. Então f é invertível numa vizinhança de \mathbf{a} , com inversa C^1 . Além disso, nessa vizinhança

$$Df^{-1}(f(\mathbf{x})) = [Df(\mathbf{x})]^{-1}.$$

2. **Teorema da Função Implícita:** $F : \mathbb{R}^{n+m} \rightarrow \mathbb{R}^m$ C^1 , $F(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \mathbf{0}$, $\det \frac{\partial F}{\partial \mathbf{y}}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \neq 0$. Então existe uma função $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ tal que $F(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{0} \Leftrightarrow \mathbf{y} = f(\mathbf{x})$ numa vizinhança de (\mathbf{a}, \mathbf{b}) . Além disso,

$$Df(\mathbf{a}) = - \left[\frac{\partial F}{\partial \mathbf{y}}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \right]^{-1} \frac{\partial F}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{a}, \mathbf{b}).$$

6. Variedades Diferenciáveis e Extremos Condicionados

1. Se $M = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : F(\mathbf{x}) = \mathbf{0}\}$ e $\text{car } DF(\mathbf{x}) = n - m$ para todo o $\mathbf{x} \in M$ então M é uma **variedade diferenciável** de dimensão m .
2. O **espaço normal** a M em \mathbf{x} é

$$T_{\mathbf{x}}^{\perp} M = \mathcal{L}\{\nabla F_1(\mathbf{x}), \dots, \nabla F_{n-m}(\mathbf{x})\}.$$

O **espaço tangente** a M em \mathbf{x} é

$$T_{\mathbf{x}} M = (T_{\mathbf{x}}^{\perp} M)^{\perp}.$$

3. **Regra dos Multiplicadores de Lagrange:** Os extremos de $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ restrita a M são soluções do sistema

$$\begin{cases} \nabla(f + \lambda_1 F_1 + \dots + \lambda_{n-m} F_{n-m})(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \\ F(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \end{cases}$$

7. Integrais em Variedades

1. Se C é uma curva parametrizada por $\mathbf{g} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ então

$$\int_C f = \int_a^b f(\mathbf{g}(t)) \left\| \frac{d\mathbf{g}}{dt}(t) \right\| dt.$$

2. Se S é uma superfície parametrizada por $\mathbf{g} : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow M$ então

$$\begin{aligned} \int_S f &= \int_U f(\mathbf{g}(u, v)) \left\| \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial v} \right\| du dv \\ &= \int_U f(\mathbf{g}(u, v)) \sqrt{\det(D\mathbf{g}^t D\mathbf{g})} du dv. \end{aligned}$$

8. Integrais de Linha, Campos Gradientes e Campos Fechados

1. **Integral de linha** de \mathbf{F} ao longo da curva C (depende do sentido):

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{g} = \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{g}(t)) \cdot \frac{d\mathbf{g}}{dt}(t) dt$$

2. **Teorema Fundamental do Cálculo para Integrais de Linha:**

$$\int_C \nabla\phi \cdot d\mathbf{g} = \phi(\mathbf{g}(b)) - \phi(\mathbf{g}(a)).$$

3. \mathbf{F} é gradiente **sse** $\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{g} = 0$ para qualquer curva fechada C .

4. \mathbf{F} é **fechado** se $\frac{\partial F_i}{\partial x_j} = \frac{\partial F_j}{\partial x_i}$ (ou seja, se $D\mathbf{F}$ é simétrica).

5. \mathbf{F} gradiente $\Rightarrow \mathbf{F}$ fechado.

6. Duas curvas fechadas dizem-se **homotópicas** se podem ser continuamente deformadas uma na outra.

7. \mathbf{F} fechado, C_1, C_2 homotópicas $\Rightarrow \oint_{C_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{g} = \oint_{C_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{g}$.

8. $A \subset \mathbb{R}^n$ é **simplesmente conexo** se qualquer curva fechada em A é homotópica em A a um ponto.

9. \mathbf{F} fechado, domínio simplesmente conexo $\Rightarrow \mathbf{F}$ gradiente.

9. Teorema de Green, Teorema da Divergência e Teorema de Stokes

1. **Teorema de Green:**

$$\oint_{\partial U} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{g} \equiv \oint_{\partial U} P dx + Q dy = \int_U \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy.$$

2. **Fluxo** de \mathbf{F} através da superfície S (depende do sentido):

$$\int_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} = \int_U \mathbf{F}(\mathbf{g}(u, v)) \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial v} \right) du dv.$$

3. **Divergência:**

$$\operatorname{div} \mathbf{F} \equiv \nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{\partial F_1}{\partial x_1} + \dots + \frac{\partial F_n}{\partial x_n}.$$

4. **Teorema da Divergência:**

$$\int_U \operatorname{div} \mathbf{F} = \oint_{\partial U} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n},$$

onde \mathbf{n} é a normal unitária **exterior**.

5. **Rotacional:**

$$\operatorname{rot} \mathbf{F} \equiv \nabla \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}, \frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x}, \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right).$$

6. **Teorema de Stokes:**

$$\int_S \operatorname{rot} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} = \oint_{\partial S} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{g},$$

onde ∂S deve ser percorrido no sentido indicado por \mathbf{n} através da regra da mão direita.

7. \mathbf{F} rotacional $\Rightarrow \operatorname{div} \mathbf{F} = 0$.

8. $A \subset \mathbb{R}^n$ é **em estrela** se existe um ponto $\mathbf{a} \in A$ tal que $[\mathbf{a}, \mathbf{x}] \subset A$ para todo o $\mathbf{x} \in A$, onde $[\mathbf{a}, \mathbf{x}]$ é segmento de recta de extremos \mathbf{a} e \mathbf{x} .

9. $\operatorname{div} \mathbf{F} = 0$, domínio em estrela $\Rightarrow \mathbf{F}$ rotacional.