Cálculo Diferencial e Integral II

Exercício de Aplicação 5 - Equações de Maxwell

Como com todas as equações básicas da Física, não é possível **deduzir** as equações de Maxwell; de certa forma elas funcionam como os axiomas do electromagnetismo. No entanto, é possível torná-las pelo menos plausíveis, e explorar algumas das suas consequências mais simples. É o que se pretende fazer nos exercícios que se seguem.

1. A **Lei de Lorentz** para a força $\mathbf{F}$ sobre uma partícula de carga eléctrica e movendo-se com velocidade $\mathbf{v}$ sob a acção de um campo eléctrico $\mathbf{E}$ e de um campo magnético $\mathbf{B}$ é

$$\mathbf{F} = e(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}).$$

Mostre que o trabalho W realizado pelo campo electromagnético sobre a carga quando esta descreve uma curva C é

$$W = e \int_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r}.$$

2. Experimentalmente, verifica-se que o campo eléctrico criado por uma carga pontual e situada na origem é

$$\mathbf{E} = \frac{e\mathbf{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^3},$$

onde $\mathbf{r} = (x, y, z)$, $r = \|\mathbf{r}\|$ e ε_0 é uma constante (dita a **permitividade eléctrica do vácuo**). Mostre que $\nabla \times \mathbf{E} = \mathbf{0}$ e que $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$ em $\mathbb{R}^3 \setminus \{\mathbf{0}\}$. Mostre ainda que se C é uma qualquer curva fechada que não contém a origem,

$$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = 0,$$

e que se S é uma qualquer variedade-2 compacta que não contém a origem, então

$$\oiint_S \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} = \begin{cases} \frac{e}{\varepsilon_0} \text{ se } S \text{ envolve a origem} \\ 0 \text{ caso contrário} \end{cases}$$

(onde $\mathbf{n}$ designa a normal unitária exterior).

3. Experimentalmente verifica-se que o electromagnetismo é uma teoria **linear**, i.e., o campo criado por várias cargas pontuais é a soma dos campos criados por cada carga (esta afirmação é não trivial, e não é verdade, por exemplo, no caso do campo gravitacional). Mostre que se $\mathbf{E}$ é o campo eléctrico criado por um número finito de cargas pontuais e C e S são uma curva e uma variedade-2 compactas que não contêm qualquer ponto onde esteja colocada uma carga, então

$$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = 0 \tag{1}$$

e

$$\oiint_S \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} = \frac{Q}{\varepsilon_0}, \tag{2}$$

onde Q é a soma das cargas envolvidas por S ($\mathbf{n}$ designa a normal unitária exterior).

4. Demonstre o **Lema da Localização**: a única função contínua $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ tal que

$$\int_B f = 0$$

para qualquer bola $B \subset \mathbb{R}^n$ é a função identicamente nula.

5. Em situações nas quais o número de cargas eléctricas envolvido é muito grande, a distribuição de carga eléctrica é aproximada por uma **densidade de carga eléctrica** $\rho : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, suposta de classe C^1, de forma a que a carga total num dado conjunto mensurável A seja

$$Q = \iiint_A \rho.$$

Se admitirmos que (1) e (2) continuam a ser válidas nesta situação, e que o campo eléctrico é de classe C^1, mostre que o Lema da Localização implica que

$$\nabla \times \mathbf{E} = \mathbf{0} \text{ (o campo eléctrico é conservativo);}$$
$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \text{ (Lei de Gauss).}$$

Estas são as **equações fundamentais da Electroestática**.

6. Experimentalmente, verifica-se que o campo magnético é produzido por correntes eléctricas. Mais precisamente, o campo magnético $\mathbf{B}$ criado por uma corrente eléctrica de intensidade I percorrendo o eixo dos zz de baixo para cima é dado por

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r^2}(-y, x, 0),$$

onde agora $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ é a coordenada cilíndrica radial e μ_0 é uma constante (dita a **permiabilidade magnética do vácuo**). Mostre que $\nabla \times \mathbf{B} = \mathbf{0}$ e que $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ em $\mathbb{R}^3 \setminus \{x = y = 0\}$. Mostre ainda que se C é uma qualquer curva fechada que não contém qualquer ponto do eixo dos zz,

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{r} = \begin{cases} \mu_0 I \text{ se } C \text{ envolve o eixo dos } zz \\ 0 \text{ caso contrário} \end{cases}$$

e que se S é uma qualquer variedade-2 compacta que não contém qualquer ponto do eixo dos zz, então

$$\oiint_S \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} = 0.$$

7. Uma **corrente eléctrica** é simplesmente um conjunto de cargas em movimento. Na aproximação em que a distribuição de carga eléctrica num dado instante é dada por uma densidade $\rho : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, define-se a **densidade de corrente eléctrica** como

$$\mathbf{j} = \rho\mathbf{v},$$

onde $\mathbf{v} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ é o campo vectorial (suposto de classe C^1) que em cada ponto indica a velocidade da carga eléctrica que ocupa esse ponto e nesse instante[1]. Mostre que se S é uma variedade-2 orientável e $\mathbf{n} : S \to \mathbb{R}^3$ é uma normal unitária, então a carga eléctrica total que atravessa S na direcção de $\mathbf{n}$ por unidade de tempo é

$$I = \iint_S \mathbf{j} \cdot \mathbf{n}.$$

8. Se $A \subset \mathbb{R}^3$ é uma variedade-3 com bordo, a carga total contida em A no instante t é

$$Q(t) = \iiint_A \rho$$

e portanto para haver conservação da carga eléctrica devemos ter

$$\frac{dQ}{dt} = -\oiint_{\partial A} \mathbf{j} \cdot \mathbf{n}$$

(onde $\mathbf{n}$ é a normal unitária exterior). Use este facto e o Lema da Localização para mostrar que ρ e $\mathbf{j}$ devem satisfazer a **equação da continuidade**

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{j} = 0.$$

9. Se a distribuição de cargas não depende do tempo tem-se $\nabla \cdot \mathbf{j} = 0$. Mostre que neste caso se C é uma curva fechada e S é uma variedade-2 qualquer tal que $C = \partial S$, então

$$I = \iint_S \mathbf{j} \cdot \mathbf{n}$$

está bem definida (i.e., não depende de S). I diz-se a **intensidade de corrente envolvida por** C.

10. Se baseados no caso da corrente ao longo do eixo dos zz admitirmos que o campo magnético criado por uma distribuição de corrente arbitrária $\mathbf{j}$ satisfaz

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{r} = \mu_0 I;$$
$$\oiint_S \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} = 0,$$

e que o campo magnético é de classe C^1, mostre que o Lema da Localização implica que

$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j}$ (Lei de Ampère);
$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ (Lei de Gauss para o campo magnético).

Estas são as **equações fundamentais da Magnetoestática**.

[1] Há aqui no entanto uma subtileza: na maior parte das correntes eléctricas produzidas artificialmente existem **duas** distribuições de carga eléctrica simétricas: uma negativa, formada pelos electrões livres que de facto se movem no fio, e outra positiva, formada por cargas imóveis. Deste modo existe corrente eléctrica mas a densidade de carga total do fio é nula.

11. Considere em circuito C que é transportado com velocidade constante $\mathbf{v}$ através de um campo magnetoestático $\mathbf{B}$. Devido à Lei de Lorentz, as cargas no circuito sofrem a acção de uma força cujo trabalho ao longo do circuito é

$$W = e \oint_C (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{r}.$$

Mostre que

$$W = -e\frac{d\Phi}{dt}$$

onde Φ é o fluxo de $\mathbf{B}$ através de uma variedade-2 S qualquer tal que $\partial S = C$ (Φ está bem definido em virtude da Lei de Gauss para o campo magnético).

Sugestão: Considere a superfície descrita por C no decorrer de um intervalo de tempo Δt, e faça depois $\Delta t \to 0$.

12. Um observador inercial que se mova com a mesma velocidade $\mathbf{v}$ do circuito C da questão anterior vê este circuito em repouso, e é portanto forçado a atribuir a força exercida sobre as cargas de circuito a um campo eléctrico $\mathbf{E}$ tal que

$$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = -\frac{d\Phi}{dt}, \tag{3}$$

onde do seu ponto de vista o fluxo Φ varia no tempo porque o campo magnético $\mathbf{B}$ varia no tempo.

Assuma que (3) é a lei correcta para campos electromagnéticos dependentes do tempo. Use o Lema da Localização para mostrar que

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \text{ (Lei de Faraday).}$$

Esta lei é de facto a correcta, e foi descoberta por Faraday não com base neste argumento teórico mas sim experimentalmente. É este o princípio usado nos dínamos para converter energia mecânica em energia eléctrica: movendo um íman nas proximidades de um circuito gera-se corrente. Na prática usam-se enrolamentos de fios com um grande número de espiras (porquê?).

13. Mostre que a Lei de Ampère requer que

$$\nabla \cdot \mathbf{j} = 0$$

e portanto só pode ser válida no regime estacionário, em que $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$. Use a Lei de Gauss e a equação da continuidade para mostrar que no caso geral

$$\nabla \cdot \left(\mathbf{j} + \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) = 0,$$

e que portanto as equações do campo electromagnético implicam a conservação da carga eléctrica se substituirmos a Lei de Ampére por

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j} + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = 0 \text{ (Lei de Ampère-Maxwell).}$$

O termo $\varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$ diz-se a **corrente de deslocamento**, e foi o único termo de facto introduzido por Maxwell nas equações do campo electromagnético, que são conhecidas, claro está, como as equações de Maxwell.

14. Mostre que
$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\,\mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\,\mathbf{c},$$
e use esta identidade vectorial para mostrar que se $\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ é um campo vectorial de classe C^2 então
$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{F}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{F}) - \nabla^2 \mathbf{F},$$
onde
$$\nabla^2 \mathbf{F} = (\nabla^2 F_1, \nabla^2 F_2, \nabla^2 F_3).$$

15. Use as equações de Maxwell e a identidade da questão anterior para mostrar que no vazio ($\rho = 0$, $\mathbf{j} = \mathbf{0}$) o campo electromagnético satisfaz
$$\nabla^2 \mathbf{E} - \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = \mathbf{0};$$
$$\nabla^2 \mathbf{B} - \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} = \mathbf{0}.$$

16. A equação
$$\nabla^2 u - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$$
é conhecida como a **equação das ondas**. Mostre que se $\mathbf{n}$ é um vector unitário e $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função de classe C^2 então
$$u(\mathbf{x}, t) = f\,(\mathbf{x} \cdot \mathbf{n} - ct)$$
é uma solução desta equação, onde $\mathbf{x} = (x, y, z)$. Esta função representa uma onda plana movendo-se na direcção $\mathbf{n}$ com velocidade c.

Portanto as equações de Maxwell prevêm a existência de **ondas electromagnéticas** propagando-se com velocidade
$$c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}.$$
Quando Maxwell substitui ε_0, μ_0 pelos seus valores numéricos (determinados experimentalmente), obteve para c (para sua surpresa) o valor da velocidade da luz no vácuo (que já fora medido experimentalmente). Daqui concluiu imediatamente que a luz era uma onda electromagnética.