

Cálculo Diferencial e Integral II

Exercício de Aplicação 2 - Termodinâmica dos Gases Ideais

N moles de um gás ideal em equilíbrio são completamente caracterizadas se especificarmos o volume a pressão. Portanto o **espaço dos estados** de N moles de um gás ideal é o conjunto

$$M = \{(V, P) \in \mathbb{R}^2 : V, P > 0\}.$$

A **temperatura** $T : M \rightarrow \mathbb{R}$ do gás é definida pela **equação de estado dos gases ideais**,

$$PV = NRT,$$

onde R é a **constante dos gases ideais**.

Se $\mathbf{G} : M \rightarrow \mathbb{R}^2$ é um campo vectorial, o seu integral de linha ao longo da curva C pode ser representado por

$$\int_C G_1 dV + G_2 dP,$$

e por essa razão escreve-se por vezes

$$\mathbf{G} = G_1 dV + G_2 dP.$$

Com esta notação, o gradiente de um campo escalar $F : M \rightarrow \mathbb{R}$ escreve-se

$$dF = \frac{\partial F}{\partial V} dV + \frac{\partial F}{\partial P} dP.$$

A **Primeira Lei da Termodinâmica** afirma que existe uma função $E : M \rightarrow \mathbb{R}$, dita a **energia interna** do gás, cujo gradiente é

$$dE = \delta W + \delta Q,$$

onde δW , δQ são campos vectoriais cujos integrais de linha

$$\Delta W = \int_C \delta W$$

$$\Delta Q = \int_C \delta Q$$

representam o trabalho ΔW realizado sobre o gás e o calor ΔQ absorvido pelo gás quando este percorre os estados de equilíbrio da curva C . Por argumentos físicos, tem-se

$$\delta W = -PdV.$$

1. Mostre que δW e δQ não são campos gradiente. É por este motivo que se emprega o símbolo δ .
2. A **capacidade calorífica a volume constante** é por definição a taxa de absorção de calor por unidade de acréscimo de temperatura quando o volume é mantido constante:

$$C_V = \lim_{\Delta P \rightarrow 0} \frac{\Delta Q}{\Delta T},$$

onde

$$\Delta Q = \int_{\{V\} \times [P, P + \Delta P]} \delta Q$$

e

$$\Delta T = T(V, P + \Delta P) - T(V, P).$$

Mostre que

$$C_V = \frac{NR}{V} \frac{\partial E}{\partial P}.$$

3. A **capacidade calorífica a pressão constante** é por definição a taxa de absorção de calor por unidade de acréscimo de temperatura quando a pressão é mantida constante:

$$C_P = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta Q}{\Delta T},$$

onde

$$\Delta Q = \int_{[V, V + \Delta V] \times \{P\}} \delta Q$$

e

$$\Delta T = T(V + \Delta V, P) - T(V, P).$$

Mostre que

$$C_P = \frac{NR}{P} \left(\frac{\partial E}{\partial V} + P \right).$$

4. Assumimos a partir de agora que C_V e C_P são constantes para um gás ideal (de facto isto constitui uma boa aproximação). Mostre que nesse caso

$$C_P = C_V + NR$$

e

$$E = C_V T + \text{constante}.$$

5. Mostre que o campo vectorial

$$dS = \frac{\delta Q}{T}$$

é de facto um campo gradiente, e calcule um potencial S . A função $S : M \rightarrow \mathbb{R}$ assim definida (a menos de uma constante) diz-se a **entropia** do gás. A sua existência é uma consequência de termos assumido C_V e C_P constantes, mas é garantida em sistemas termodinâmicos gerais pela **Segunda Lei da Termodinâmica**.