Resumo dos resumos de CDI-II

1. Topologia e Continuidade de Funções em $\mathbb{R}^n$

1. **Limites direccionais:** Se
$$\lim_{x\to 0} f(x, mx)$$
não existe, ou existe mas depende de m, então
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y)$$
não existe.

2. **Produto de uma função limitada por um infinitésimo:**
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} = 0$$
porque $y \to 0$ e
$$\left|\frac{x^2}{x^2 + y^2}\right| \leq 1.$$

3. **Teorema Weierstrass:** Se $A \subset \mathbb{R}^n$ é compacto e $f : A \to \mathbb{R}$ é contínua então f tem máximo e mínimo em A.

2. Cálculo Diferencial em $\mathbb{R}^n$

1. **Derivada** de $\mathbf{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ **segundo o vector** $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ no ponto $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$:
$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{v}}(\mathbf{a}) = \lim_{h\to 0} \frac{\mathbf{f}(\mathbf{a} + h\mathbf{v}) - \mathbf{f}(\mathbf{a})}{h}.$$

2. **Derivada parcial:**
$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x_i}(\mathbf{a}) = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{e}_i}(\mathbf{a}).$$

3. $\mathbf{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ é **diferenciável** em $\mathbf{a}$ se
$$\lim_{\mathbf{h}\to\mathbf{0}} \frac{\mathbf{f}(\mathbf{a} + \mathbf{h}) - \mathbf{f}(\mathbf{a}) - D\mathbf{f}(\mathbf{a}) \cdot \mathbf{h}}{\|\mathbf{h}\|} = \mathbf{0},$$
onde $D\mathbf{f}(\mathbf{a})$ é a **matriz Jacobiana:**
$$D\mathbf{f}(\mathbf{a}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{bmatrix}.$$

4. $\mathbf{f}$ diferenciável em $\mathbf{a} \Rightarrow \mathbf{f}$ contínua em $\mathbf{a}$.
5. $\mathbf{f}$ diferenciável em $\mathbf{a} \Rightarrow \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{v}}(\mathbf{a}) = D\mathbf{f}(\mathbf{a}) \cdot \mathbf{v}$.
6. $\mathbf{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ é de **classe** C^1 se todas as suas derivadas parciais $\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}$ são funções contínuas.
7. $\mathbf{f}$ $C^1 \Rightarrow \mathbf{f}$ diferenciável.
8. **Derivada da composta:**

$$D(\mathbf{g} \circ \mathbf{f})(\mathbf{a}) = D\mathbf{g}(\mathbf{f}(\mathbf{a}))D\mathbf{f}(\mathbf{a}).$$

9. **Regra da cadeia:**

$$\frac{\partial (g_i \circ \mathbf{f})}{\partial x_j} = \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial g_i}{\partial y_k} \frac{\partial f_k}{\partial x_j}.$$

10. **Gradiente:**

$$\operatorname{grad} f \equiv \nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right).$$

3. Fórmula de Taylor e Extremos

1. **Lema de Schwarz:** Se $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é de classe C^2 então

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i},$$

ou seja, a **matriz Hessiana**

$$Hf = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial {x_1}^2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial {x_n}^2} \end{bmatrix}$$

é simétrica.

2. Se $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ tem um extremo local em $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ então $Df(\mathbf{a}) = 0$ ($\mathbf{a}$ é um **ponto crítico**, ou **ponto de estacionaridade**).
3. $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de classe C^2, $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ um ponto crítico de f. Se $Hf(\mathbf{a})$ é:
   (i) **definida positiva** (todos os v.p. > 0) então $\mathbf{a}$ é um ponto de **mínimo local**;
   (ii) **definida negativa** (todos os v.p. < 0) então $\mathbf{a}$ é um ponto de **máximo local**;
   (iii) **indefinida** (existem v.p. > 0 e v.p. < 0) então $\mathbf{a}$ é um **ponto de sela**.

4. Cálculo Integral em $\mathbb{R}^n$

1. **Teorema de Fubini:**

$$\int_{I \times J} f = \int_I \left(\int_J f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \, dV_m(\mathbf{y}) \right) dV_n(\mathbf{x}) = \int_J \left(\int_I f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \, dV_n(\mathbf{x}) \right) dV_m(\mathbf{y}).$$

2. **Teorema de mudança de variáveis:**

$$\int_{\mathbf{g}(U)} f = \int_U (f \circ \mathbf{g}) |J\mathbf{g}|.$$

3. **Coordenadas polares:** $\mathbf{g} :]0, +\infty[\times]0, 2\pi[\to \mathbb{R}^2$

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\,\mathrm{sen}\,\theta \end{cases} , \qquad J\mathbf{g}(r,\theta) = r.$$

4. **Coordenadas cilíndricas:** $\mathbf{g} :]0, +\infty[\times]0, 2\pi[\times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi \\ y = \rho\,\mathrm{sen}\,\varphi \\ z = z \end{cases} , \qquad J\mathbf{g}(\rho,\varphi,z) = \rho.$$

5. **Coordenadas esféricas:** $\mathbf{g} :]0, +\infty[\times]0, \pi[\times]0, 2\pi[\to \mathbb{R}^3$

$$\begin{cases} x = r\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\varphi \\ y = r\,\mathrm{sen}\,\theta\,\mathrm{sen}\,\varphi \\ z = r\cos\theta \end{cases} , \qquad J\mathbf{g}(r,\theta,\varphi) = r^2\,\mathrm{sen}\,\theta.$$

6. Dada uma **função densidade de massa** $\rho : A \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^+$ define-se:
   (i) O **volume** de A:
   $$V_3(A) = \int_A 1.$$
   (ii) A **massa** de A:
   $$M = \int_A \rho.$$
   (iii) A coordenada x do **centro de massa** de A:
   $$\bar{x} = \frac{1}{M}\int_A \rho\, x$$
   (analogamente para $\bar{y}, \bar{z}$; fazendo $\rho = 1$ obtém-se o **centróide**).
   (iv) O **momento de inércia** de A em relação ao eixo dos zz:
   $$I_z = \int_A \rho\,(x^2 + y^2)$$
   (analogamente para I_x, I_y).

7. **Regra de Leibnitz:**

$$\frac{d}{dt}\int_I f(\mathbf{x},t)\,dV_n(\mathbf{x}) = \int_I \frac{\partial f}{\partial t}(\mathbf{x},t)\,dV_n(\mathbf{x}).$$

5. Função Inversa e Função Implícita

1. **Teorema da Função Inversa:** $\mathbf{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ C^1, $J\mathbf{f}(\mathbf{a}) \neq 0$. Então $\mathbf{f}$ é invertível numa vizinhança de $\mathbf{a}$, com inversa C^1. Além disso, nessa vizinhança

$$D\mathbf{f}^{-1}(\mathbf{f}(\mathbf{x})) = [D\mathbf{f}(\mathbf{x})]^{-1}.$$

2. **Teorema da Função Implícita:** $\mathbf{F} : \mathbb{R}^{n+m} \to \mathbb{R}^m$ C^1, $\mathbf{F}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \mathbf{0}$, $\det \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{y}}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \neq 0$. Então existe uma função $\mathbf{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ tal que $\mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{0} \Leftrightarrow \mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ numa vizinhança de $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$. Além disso,

$$D\mathbf{f}(\mathbf{a}) = -\left[\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{y}}(\mathbf{a}, \mathbf{b})\right]^{-1} \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{a}, \mathbf{b}).$$

6. Variedades Diferenciáveis e Extremos Condicionados

1. Se $M = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}\}$ e $\operatorname{car} D\mathbf{F}(\mathbf{x}) = n - m$ para todo o $\mathbf{x} \in M$ então M é uma **variedade diferenciável** de dimensão m.
2. O **espaço normal** a M em $\mathbf{x}$ é

$$T_{\mathbf{x}}^{\perp} M = \mathcal{L}\{\nabla F_1(\mathbf{x}), \ldots, \nabla F_{n-m}(\mathbf{x})\}.$$

O **espaço tangente** a M em $\mathbf{x}$ é

$$T_{\mathbf{x}} M = \left(T_{\mathbf{x}}^{\perp} M\right)^{\perp}.$$

3. **Regra dos Multiplicadores de Lagrange:** Os extremos de $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ restrita a M são soluções do sistema

$$\begin{cases} \nabla(f + \lambda_1 F_1 + \ldots + \lambda_{n-m} F_{n-m})(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \\ \mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \end{cases}$$

7. Integrais em Variedades

1. Se C é uma curva parametrizada por $\mathbf{g} : [a, b] \to \mathbb{R}$ então

$$\int_C f = \int_a^b f(\mathbf{g}(t)) \left\| \frac{d\mathbf{g}}{dt}(t) \right\| dt.$$

2. Se S é uma superfície parametrizada por $\mathbf{g} : U \subset \mathbb{R}^2 \to M$ então

$$\begin{aligned} \int_S f &= \int_U f(\mathbf{g}(u, v)) \left\| \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial v} \right\| du\, dv \\ &= \int_U f(\mathbf{g}(u, v)) \sqrt{\det(D\mathbf{g}^t D\mathbf{g})}\, du\, dv. \end{aligned}$$

8. Integrais de Linha, Campos Gradientes e Campos Fechados

1. **Integral de linha** de $\mathbf{F}$ ao longo da curva C (depende do sentido):

$$\int_C \langle \mathbf{F}, d\mathbf{g} \rangle = \int_a^b \left\langle \mathbf{F}(\mathbf{g}(t)), \frac{d\mathbf{g}}{dt}(t) \right\rangle dt$$

2. **Teorema Fundamental do Cálculo para Integrais de Linha:**

$$\int_C \langle \nabla\phi, d\mathbf{g} \rangle = \phi(\mathbf{g}(b)) - \phi(\mathbf{g}(a)).$$

3. $\mathbf{F}$ é gradiente **sse** $\oint_C \langle \mathbf{F}, d\mathbf{g} \rangle = 0$ para qualquer curva fechada C.
4. $\mathbf{F}$ é **fechado** se $\dfrac{\partial F_i}{\partial x_j} = \dfrac{\partial F_j}{\partial x_i}$ (ou seja, se $D\mathbf{F}$ é simétrica).
5. $\mathbf{F}$ gradiente $\Rightarrow$ $\mathbf{F}$ fechado.
6. Duas curvas fechadas dizem-se **homotópicas** se podem ser continuamente deformadas uma na outra.
7. $\mathbf{F}$ fechado, C_1, C_2 homotópicas $\Rightarrow$ $\oint_{C_1} \langle \mathbf{F}, d\mathbf{g} \rangle = \oint_{C_2} \langle \mathbf{F}, d\mathbf{g} \rangle$.
8. $A \subset \mathbb{R}^n$ é **simplesmente conexo** se qualquer curva fechada em A é homotópica em A a um ponto.
9. $\mathbf{F}$ fechado, domínio simplesmente conexo $\Rightarrow$ $\mathbf{F}$ gradiente.

9. Teorema de Green, Teorema da Divergência e Teorema de Stokes

1. **Teorema de Green:**

$$\oint_{\partial U} \langle \mathbf{F}, d\mathbf{g} \rangle \equiv \oint_{\partial U} P dx + Q dy = \int_U \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx\, dy.$$

2. **Fluxo** de $\mathbf{F}$ através da superfície S (depende do sentido):

$$\int_S \langle \mathbf{F}, \mathbf{n} \rangle = \int_U \left\langle \mathbf{F}(\mathbf{g}(u,v)), \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial v} \right\rangle du\, dv.$$

3. **Divergência:**

$$\operatorname{div} \mathbf{F} \equiv \nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{\partial F_1}{\partial x_1} + \ldots + \frac{\partial F_n}{\partial x_n}.$$

4. **Teorema da Divergência:**

$$\int_U \operatorname{div} \mathbf{F} = \oint_{\partial U} \langle \mathbf{F}, \mathbf{n} \rangle ,$$

onde $\mathbf{n}$ é a normal unitária **exterior**.

5. **Rotacional:**

$$\operatorname{rot} \mathbf{F} \equiv \nabla \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}, \frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x}, \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right).$$

6. **Teorema de Stokes:**
$$\int_S \langle \operatorname{rot} \mathbf{F}, \mathbf{n} \rangle = \oint_{\partial S} \langle \mathbf{F}, \mathbf{dg} \rangle \,,$$
onde ∂S deve ser percorrido no sentido indicado por $\mathbf{n}$ através da regra da mão direita.
7. $\mathbf{F}$ rotacional $\Rightarrow \operatorname{div} \mathbf{F} = 0$.
8. $A \subset \mathbb{R}^n$ é **em estrela** se existe um ponto $\mathbf{a} \in A$ tal que $[\mathbf{a}, \mathbf{x}] \subset A$ para todo o $\mathbf{x} \in A$, onde $[\mathbf{a}, \mathbf{x}]$ é segmento de recta de extremos $\mathbf{a}$ e $\mathbf{x}$.
9. $\operatorname{div} \mathbf{F} = 0$, domínio em estrela $\Rightarrow \mathbf{F}$ rotacional.