CDI-II - Formas Diferenciais

1 Covectores e produto exterior

Definição 1.1 *O* **espaço vectorial dual** *de* $\mathbb{R}^n$ *é*

$$(\mathbb{R}^n)^* = \{\alpha : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} : \alpha \text{ é linear}\}.$$

Os elementos de $(\mathbb{R}^n)^*$ *designam-se por* **covectores**.

Por linearidade, um covector é determinado pela sua acção na base canónica de $\mathbb{R}^n$. Definimos os covectores $dx^1, \ldots, dx^n \in (\mathbb{R}^n)^*$ através de

$$dx^i(\mathbf{e}_j) = \begin{cases} 1 \text{ se } i = j \\ 0 \text{ se } i \neq j \end{cases}$$

(veremos mais tarde a razão de ser desta notação). Dado $\alpha \in (\mathbb{R}^n)^*$, temos

$$\alpha(\mathbf{v}) = \alpha\left(\sum_{i=1}^{n} v^i \mathbf{e}_i\right) = \sum_{i=1}^{n} v^i \alpha\left(\mathbf{e}_i\right) = \sum_{i=1}^{n} v^i \alpha_i,$$

onde $\alpha_i = \alpha(\mathbf{e}_i)$. Por outras palavras,

$$\alpha(\mathbf{v}) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \, dx^i(\mathbf{v}) \Leftrightarrow \alpha = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \, dx^i.$$

Daqui facilmente se conclui que $\{dx^1, \ldots, dx^n\}$ é uma base para $(\mathbb{R}^n)^*$, que é então um espaço vectorial de dimensão n.

Definição 1.2 *Um* **tensor-**k *(covariante)* T *é uma aplicação multilinear* $T : (\mathbb{R}^n)^k \to \mathbb{R}$, *i.e.*

(i) $T(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_i + \mathbf{w}_i, \ldots, \mathbf{v}_k) = T(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_i, \ldots, \mathbf{v}_k) + T(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{w}_i, \ldots, \mathbf{v}_k)$;

(ii) $T(\mathbf{v}_1, \ldots, \lambda\mathbf{v}_i, \ldots, \mathbf{v}_k) = \lambda T(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_i, \ldots, \mathbf{v}_k)$.

Exemplo 1.3

(i) Um covector é um tensor-1.

(ii) $g : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *dado por* $g(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle$ *é um tensor-2 (***tensor da métrica***).*

(iii) $T : (\mathbb{R}^n)^n \to \mathbb{R}$ *dado por* $T(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n) = \det(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n)$ *é um tensor-n* **alternante**.

Definição 1.4 *Um tensor-k α diz-se* **alternante**, *ou um* **covector de grau** k, *se*

$$\alpha(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_i, \ldots, \mathbf{v}_j \ldots, \mathbf{v}_k) = -\alpha(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_j, \ldots, \mathbf{v}_i \ldots, \mathbf{v}_k).$$

Designamos por $\Lambda^k(\mathbb{R}^n)$ o espaço vectorial dos covectores-k.

Dados $i_1, \ldots, i_k \in \{1, \ldots, n\}$, definimos $dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_k} \in \Lambda^k(\mathbb{R}^n)$ mediante

$$dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_k}(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k) = \det \begin{bmatrix} dx^{i_1}(\mathbf{v}_1) & \ldots & dx^{i_1}(\mathbf{v}_k) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ dx^{i_k}(\mathbf{v}_1) & \ldots & dx^{i_k}(\mathbf{v}_k) \end{bmatrix}.$$

Note-se que

$$dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_p} \wedge \ldots \wedge dx^{i_q} \wedge \ldots \wedge dx^{i_k} = -dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_q} \wedge \ldots \wedge dx^{i_p} \wedge \ldots \wedge dx^{i_k},$$

e portanto

$$dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_p} \wedge \ldots \wedge dx^{i_p} \ldots \wedge dx^{i_k} = 0.$$

Proposição 1.5 $\left\{dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_k}\right\}_{1 \leq i_1 < \ldots < i_k \leq n}$ *é uma base para $\Lambda^k(\mathbb{R}^n)$, cuja dimensão é portanto $\binom{n}{k}$.*

Dem: Se

$$\sum_{i_1 < \ldots < i_k} \alpha_{i_1 \ldots i_k} \, dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_k} = 0$$

então aplicando este covector-k a $\mathbf{e}_{j_1}, \ldots, \mathbf{e}_{j_k}$ (com $j_1 < \ldots < j_k$) obtém-se $\alpha_{j_1 \ldots j_k} = 0$. Isto mostra que os elementos de $\left\{dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_k}\right\}_{1 \leq i_1 < \ldots < i_k \leq n}$ são linearmente independentes. Para mostrar que geram $\Lambda^k(\mathbb{R}^n)$, tome-se um covector-k T e considere-se

$$\alpha = \sum_{i_1 < \ldots < i_k} T(\mathbf{e}_{i_1}, \ldots, \mathbf{e}_{i_k}) \, dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_k}.$$

Deve ser claro que

$$\alpha(\mathbf{e}_{i_1}, \ldots, \mathbf{e}_{i_k}) = T(\mathbf{e}_{i_1}, \ldots, \mathbf{e}_{i_k})$$

para $i_1 < \ldots < i_k$; por serem ambos alternantes, a igualdade vale para os índices numa ordem qualquer, e por multilinearidade vale para quaisquer vectores. $\square$

Nota 1.6 *Uma vez que $\binom{n}{0} = 1$, define-se $\Lambda^0(\mathbb{R}^n) = \mathbb{R}$.*

Exemplo 1.7 $\Lambda^2(\mathbb{R}^3)$ *tem dimensão 3, e uma base é por exemplo $\{dy \wedge dz, dz \wedge dx, dx \wedge dy\}$. Isto faz com que $\mathbb{R}^3$ possa ser identificado tanto com $\Lambda^1(\mathbb{R}^3) \equiv (\mathbb{R}^3)^*$ como com $\Lambda^2(\mathbb{R}^3)$: se $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$, definimos*

$$\omega_{\mathbf{v}} = v^1 dx + v^2 dy + v^3 dz$$

e

$$\Omega_{\mathbf{v}} = v^1 dy \wedge dz + v^2 dz \wedge dx + v^3 dx \wedge dy.$$

Note-se que na verdade $\omega_{\mathbf{v}}$ pode ser definida para $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$. É fácil ver que

$$\omega_{\mathbf{v}}(\mathbf{w}) = \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle,$$

e que

$$\Omega_{\mathbf{u}}(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \times \mathbf{w} \rangle.$$

Definição 1.8 *Se* $\alpha \in \Lambda^k(\mathbb{R}^n)$ *e* $\beta \in \Lambda^l(\mathbb{R}^n)$,

$$\alpha = \sum_{i_1<\ldots<i_k} \alpha_{i_1\ldots i_k}\, dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_k}, \qquad \beta = \sum_{j_1<\ldots<j_l} \beta_{j_1\ldots j_l}\, dx^{j_1} \wedge \ldots \wedge dx^{j_l},$$

definimos o seu **produto exterior** $\alpha \wedge \beta \in \Lambda^{k+l}(\mathbb{R}^n)$ *como*

$$\alpha \wedge \beta = \sum_{\substack{i_1<\ldots<i_k \\ j_1<\ldots<j_l}} \alpha_{i_1\ldots i_k}\, \beta_{j_1\ldots j_l}\, dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_k} \wedge dx^{j_1} \wedge \ldots \wedge dx^{j_l}.$$

Nota 1.9 *Se* α *é um covector-*0 *(número real) o produto exterior por* α *é simplesmente o produto por um escalar.*

Exemplo 1.10 *O produto exterior pode ser visto como uma generalização do produto externo: se* $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$ *então*

$$\omega_{\mathbf{v}} \wedge \omega_{\mathbf{w}} = \Omega_{\mathbf{v}\times\mathbf{w}}.$$

Pode também ser visto como uma generalização do produto interno:

$$\omega_{\mathbf{v}} \wedge \Omega_{\mathbf{w}} = \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle dx \wedge dy \wedge dz.$$

Proposição 1.11 Propriedades do produto exterior:

(i) $\alpha \wedge (\beta + \gamma) = \alpha \wedge \beta + \alpha \wedge \gamma$;

(ii) $\alpha \wedge \beta = (-1)^{kl} \beta \wedge \alpha \qquad (\alpha \in \Lambda^k(\mathbb{R}^n), \beta \in \Lambda^l(\mathbb{R}^n))$;

(iii) $\alpha \wedge (\beta \wedge \gamma) = (\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma$.

Dem: Exercício. □

2 Formas diferenciais, "pull-back" e derivada exterior

Definição 2.1 *Uma* **forma diferencial de grau** k *em* $\mathbb{R}^n$ *é uma função* $\omega : \mathbb{R}^n \to \Lambda^k(\mathbb{R}^n)$ *de classe* C^∞. *Designamos por* $\Omega^k(\mathbb{R}^n)$ *o conjuntos das formas-*k *em* $\mathbb{R}^n$.

Exemplo 2.2 *Uma forma-*0 *é simplesmente uma função* $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *de classe* C^∞.

Definição 2.3 *Se* $\mathbf{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *é de classe* C^∞ *e* $\omega \in \Omega^k(\mathbb{R}^m)$ *então o* **"pull-back"** *de* ω *por* $\mathbf{f}$ *é a forma-*k $\mathbf{f}^*\omega \in \Omega^k(\mathbb{R}^n)$ *definida por*

$$(\mathbf{f}^*\omega)(\mathbf{x})(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k) = \omega(\mathbf{f}(\mathbf{x}))(D\mathbf{f}(\mathbf{x})\mathbf{v}_1, \ldots, D\mathbf{f}(\mathbf{x})\mathbf{v}_k).$$

Exemplo 2.4 *O "pull-back" de uma forma-*0 ϕ *por* $\mathbf{f}$ *é simplesmente a pré-composição* $\phi \circ \mathbf{f}$.

Proposição 2.5 Propriedades do pull-back:

(i) $\mathbf{f}^*(\omega + \eta) = \mathbf{f}^*\omega + \mathbf{f}^*\eta$;

(ii) $\mathbf{f}^*(\omega \wedge \eta) = \mathbf{f}^*\omega \wedge \mathbf{f}^*\eta$;

(iii) $(\mathbf{g} \circ \mathbf{f})^*(\omega) = \mathbf{f}^*(\mathbf{g}^*\omega)$.

Dem: Exercício. $\square$

Definição 2.6 *Se* $\omega \in \Omega^k(\mathbb{R}^n)$,

$$\omega \;=\; \sum_{i_1<\ldots<i_k} \omega_{i_1\ldots i_k}(\mathbf{x})\, dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_k},$$

então a sua **derivada exterior** *é a forma-*$(k+1)$ $d\omega \in \Omega^{k+1}(\mathbb{R}^n)$ *definida por*

$$d\omega \;=\; \sum_{i_1<\ldots<i_k} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \omega_{i_1\ldots i_k}}{\partial x^i}\, dx^i \wedge dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_k}.$$

Exemplo 2.7

1. *A derivada exterior de uma forma-*0 ϕ *é a forma-*1

$$d\phi = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \phi}{\partial x^i}\, dx^i.$$

Em cada ponto, esta forma-1 *é a transformação linear representada pela matriz Jacobiana de* ϕ*, ou seja, é a derivada de* ϕ*! Em particular, a derivada exterior da função* x^i *é* dx^i*, o que justifica a notação para a base de* $(\mathbb{R}^n)^*$.

2. *Outra maneira de pensar na derivada exterior de uma forma-*0 $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *é como sendo a forma-*1 *que corresponde ao gradiente de* ϕ:

$$d\phi = \omega_{\operatorname{grad}\phi}.$$

3. *Se* $\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *é um campo vectorial de classe* C^∞ *então*

$$d\omega_{\mathbf{F}} = \Omega_{\operatorname{rot}\mathbf{F}}$$

e

$$d\Omega_{\mathbf{F}} = (\operatorname{div}\mathbf{F})\, dx \wedge dy \wedge dz.$$

As formas diferenciais fornecem um método rápido de cálculo de rotacionais: por exemplo, se $\mathbf{F} = (-y, x, z)$ *então* $\omega_{\mathbf{F}} = -ydx + xdy + zdz$*, donde*

$$\Omega_{\operatorname{rot}\mathbf{F}} = d\omega_{\mathbf{F}} = -dy \wedge dx + dx \wedge dy = 2dx \wedge dy,$$

e portanto $\operatorname{rot}\mathbf{F} = (0, 0, 2)$.

Proposição 2.8 Propriedades da derivada exterior:

(i) $d(\omega + \eta) = d\omega + d\eta$;

(ii) $d(\omega \wedge \eta) = d\omega \wedge \eta + (-1)^k \omega \wedge d\eta \qquad (\omega \in \Omega^k(\mathbb{R}^n))$;

(iii) $d(d\omega) = 0$;

(iv) $\mathbf{f}^*(d\omega) = d(\mathbf{f}^*\omega)$.

Dem: (i) e (ii) são imediatas. Para provar (iii), note-se que

$$d(d\omega) = d \sum_{i_1<\ldots<i_k} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \omega_{i_1\ldots i_k}}{\partial x^i} \, dx^i \wedge dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_k}$$
$$\sum_{i_1<\ldots<i_k} \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 \omega_{i_1\ldots i_k}}{\partial x^j \partial x^i} \, dx^j \wedge dx^i \wedge dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_k}$$

Pelo Lema de Schwarz

$$\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 \omega_{i_1\ldots i_k}}{\partial x^j \partial x^i} \, dx^j \wedge dx^i = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 \omega_{i_1\ldots i_k}}{\partial x^i \partial x^j} \, dx^j \wedge dx^i = - \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 \omega_{i_1\ldots i_k}}{\partial x^i \partial x^j} \, dx^i \wedge dx^j,$$

pelo que esta expressão se anula, e consequentemente $d(d\omega)$.

Para provar (iv), notamos que para formas-0 ϕ se tem

$$d(\mathbf{f}^*\phi)(\mathbf{v}) = d(\phi \circ \mathbf{f})(\mathbf{v}) = d\phi(D\mathbf{f}(\mathbf{v})) = (\mathbf{f}^* d\phi)(\mathbf{v}).$$

Em particular temos

$$d(\mathbf{f}^*(d\phi)) = d(d(\mathbf{f}^*\phi)) = 0 = \mathbf{f}^*(d(d\phi)),$$

pelo que (iv) vale também para formas-1 do tipo $d\phi$. Como qualquer forma-k pode ser construida a partir de formas-0 e das formas-1 $dx^1, \ldots, dx^n$ usando produtos exteriores e somas, é fácil ver que (iv) vale para qualquer forma-k. □

Exemplo 2.9

(i) Se $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ *é um campo escalar então* $d(d\phi) = 0 \Leftrightarrow \mathrm{rot}(\mathrm{grad}\, \phi) = \mathbf{0}$.

(ii) Se $\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *é um campo vectorial então* $d(d\omega_{\mathbf{F}}) = 0 \Leftrightarrow \mathrm{div}(\mathrm{rot}\, \phi) = 0$.

Definição 2.10 *Dizemos que* $\omega \in \Omega^k(\mathbb{R}^n)$ *é:*

(i) **fechada** *se* $d\omega = 0$*;*

(ii) **exacta** *se* $\omega = d\eta$ *para* $\eta \in \Omega^{k-1}(\mathbb{R}^n)$ *(dito um* **potencial** *para* ω*).*

Proposição 2.11 *Se* $\omega \in \Omega^k(\mathbb{R}^n)$ *é exacta então* ω *fechada.*

Dem: Óbvia. □

Teorema 2.12 (Lema de Poincaré) *Se* $\omega \in \Omega^k(U)$ *é fechada e o conjunto aberto* U *é em estrela então* ω *é exacta.*

Dem: Supomos sem perda de generalidade que $\mathbf{0}$ é o centro de U. Se

$$\omega(\mathbf{x}) \;=\; \sum_{i_1<\ldots<i_k} \omega_{i_1\ldots i_k}(\mathbf{x}) \, dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_k},$$

definimos $I\Omega \in \Omega^{k-1}(U)$ mediante

$$I\omega(\mathbf{x}) \;=\; \sum_{i_1<\ldots<i_k} \sum_{l=1}^{n} (-1)^{l-1} \left(\int_0^1 t^{k-1} \omega_{i_1\ldots i_k}(t\mathbf{x}) \, dt \right) x^{i_l} \, dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge \widehat{dx^{i_l}} \wedge \ldots \wedge dx^{i_k}$$

(onde $\widehat{\ }$ significa omissão). Temos

$$\omega = d(I\omega) + I(d\omega),$$

e portanto se $d\omega = 0$ então $\omega = d(I\omega)$. $\square$

Exemplo 2.13

(i) Se $\mathbf{F} : U \to \mathbb{R}^n$ é um campo fechado e $U \subset \mathbb{R}^n$ é em estrela então existe $\phi : U \to \mathbb{R}$ tal que $\mathbf{F} = \operatorname{grad} \phi$.

(ii) Se $\mathbf{F} : U \to \mathbb{R}^3$ é um campo vectorial com $\operatorname{div} \mathbf{F} = 0$ e $U \subset \mathbb{R}^3$ é em estrela então existe $\mathbf{A} : U \to \mathbb{R}^3$ tal que $\operatorname{rot} \mathbf{A} = \mathbf{F}$.

As formas diferenciais fornecem um método rápido de cálculo de potenciais vectores: por exemplo, se $\mathbf{F} = (2y, 2z, 0)$ então

$$\Omega_{\mathbf{F}} = 2y\, dy \wedge dz + 2z\, dz \wedge dx = d\left(y^2\right) \wedge dz + d\left(z^2\right) \wedge dx = d\left(y^2 dz + z^2 dx\right),$$

e portanto um potencial vector para $\mathbf{F}$ é $\mathbf{A} = \left(z^2, 0, y^2\right)$.

3 Integração e Teorema de Stokes

Proposição 3.1 *Se $\mathbf{g} : U \subset \mathbb{R}^m \to M$ e $\mathbf{h} : V \subset \mathbb{R}^m \to M$ são parametrizações da variedade-m $M \subset \mathbb{R}^n$ então $\mathbf{h}^{-1} \circ \mathbf{g}$ é um difeomorfismo (bijecção C^∞ com inversa C^∞).*

Dem: Como as colunas de $D\mathbf{g}$ e $D\mathbf{h}$ geram o mesmo espaço vectorial (espaço tangente), existe uma única matriz $m \times m$ não singular A tal que $D\mathbf{g} = D\mathbf{h}\, A$. É fácil verificar que $A = D(\mathbf{h}^{-1} \circ \mathbf{g})$, e o Teorema da Função Inversa garante então que $\mathbf{h}^{-1} \circ \mathbf{g}$ é um difeomorfismo. $\square$

Definição 3.2 *Dizemos que duas parametrizações $\mathbf{g} : U \subset \mathbb{R}^m \to M$ e $\mathbf{h} : V \subset \mathbb{R}^m \to M$ da variedade-m $M \subset \mathbb{R}^n$ induzem a* **mesma orientação** *se $D(\mathbf{h}^{-1} \circ \mathbf{g}) > 0$, e* **orientações opostas** *se $D(\mathbf{h}^{-1} \circ \mathbf{g}) < 0$. A variedade M diz-se* **orientável** *se é possível escolher parametrizações cujas imagens cobrem M e que induzem todas a mesma orientação. Uma* **orientação** *numa variedade orientável é uma escolha de uma família maximal de parametrizações nestas condições, que se dizem* **positivas***.*

Definição 3.3 *Se $\mathbf{g} : U \subset \mathbb{R}^m \to M$ é uma parametrização positiva da variedade-m orientável $M \subset \mathbb{R}^n$ e $\omega \in \Omega^m(\mathbb{R}^n)$, define-se o* **integral** *de ω ao longo de M mediante*

$$\begin{aligned}\int_M \omega &= \int_U \omega(\mathbf{g}(\mathbf{t})) \left(\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial t^1}, \ldots, \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial t^m}\right) dt^1 \ldots dt^m \\ &= \int_U \mathbf{g}^* \omega \left(\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_m\right) dt^1 \ldots dt^m.\end{aligned}$$

Nota 3.4 *Se pensarmos num conjunto aberto $U \subset \mathbb{R}^n$ como uma variedade de dimensão n, esta definição implica*

$$\int_U f(\mathbf{x})\, dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n = \int_U f(\mathbf{x})\, dx^1 \ldots dx^n,$$

e portanto

$$\int_M \omega = \int_U \mathbf{g}^* \omega.$$

Exemplo 3.5

1. *Se $M \subset \mathbb{R}^n$ é uma variedade-1 e $\mathbf{F} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ é um campo vectorial então*
$$\int_M \omega_{\mathbf{F}} = \int_a^b \omega_{\mathbf{F}}(\mathbf{g}(t)) \left(\frac{d\mathbf{g}}{dt}(t) \right) dt = \int_a^b \left\langle \mathbf{F}(\mathbf{g}(t)), \frac{d\mathbf{g}}{dt}(t) \right\rangle dt = \int_M \langle \mathbf{F}, d\mathbf{g} \rangle$$
é o integral de linha de $\mathbf{F}$ ao longo de M.

2. *Se $M \subset \mathbb{R}^3$ é uma variedade-2 e $\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ é um campo vectorial então*
$$\int_M \Omega_{\mathbf{F}} = \int_U \Omega_{\mathbf{F}}(\mathbf{g}(u,v)) \left(\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial u}, \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial v} \right) du\, dv = \int_U \left\langle \mathbf{F}(\mathbf{g}(u,v)), \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial v} \right\rangle du\, dv = \int_M \langle \mathbf{F}, \mathbf{n} \rangle$$
é o fluxo de $\mathbf{F}$ através de M.

Proposição 3.6 *O integral de uma forma-m numa variedade-m está bem definido, i.e. só depende da orientação.*

Dem: Começamos por ver que a definição é consistente para integrais em variedades-n: se $U, V \subset \mathbb{R}^n$ são conjuntos abertos, $\omega = f dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n \in \Omega^n(\mathbb{R}^n)$ e $\mathbf{g} : U \to V$ é um difeomorfismo então
$$\begin{aligned}
&\int_U f(\mathbf{g}(\mathbf{t}))\, dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n \left(\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial t^1}, \ldots, \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial t^n} \right) dt^1 \ldots dt^n \\
&\qquad = \int_U f(\mathbf{g}(\mathbf{t})) \det \left(\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial t^1}, \ldots, \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial t^n} \right) dt^1 \ldots dt^n \\
&\qquad = \int_U f(\mathbf{g}(\mathbf{t}))(\det D\mathbf{g})\, dt^1 \ldots dt^n \\
&\qquad = \pm \int_U f(\mathbf{g}(\mathbf{t}))\, |\det D\mathbf{g}|\, dt^1 \ldots dt^n \\
&\qquad = \pm \int_V f(\mathbf{x})\, dx^1 \ldots dx^n
\end{aligned}$$
pelo Teorema de Mudança de Variáveis, onde o sinal é positivo ou negativo consoante o sinal do Jacobiano de $\mathbf{g}$.

Seja agora M uma variedade-m, $\mathbf{g} : U \subset \mathbb{R}^m \to M$ e $\mathbf{h} : V \subset \mathbb{R}^m \to M$ duas parametrizações, $\mathbf{k} = \mathbf{h}^{-1} \circ \mathbf{g}$ e $\omega \in \Omega^m(\mathbb{R}^n)$. Usando o resultado acima,
$$\int_U \mathbf{g}^*\omega = \int_U (\mathbf{h} \circ \mathbf{k})^*\omega = \int_U \mathbf{k}^*(\mathbf{h}^*\omega) = \pm \int_V \mathbf{h}^*\omega$$
onde o sinal é positivo ou negativo consoante o sinal do Jacobiano de $\mathbf{k} : U \to V$. □

Definição 3.7 *A* **orientação induzida** *no* **bordo** *∂M de uma variedade-m com bordo $M \subset \mathbb{R}^n$ é a orientação definida da seguinte forma: se $\mathbf{g} : U \cap \{t^1 \leq 0\} \to M$ é uma parametrização positiva de M tal que $\mathbf{h}(t^2, \ldots, t^m) = \mathbf{g}(0, t^2, \ldots, t^m)$ é uma parametrização de ∂M então $\mathbf{h}$ é positiva.*

Teorema 3.8 (Stokes) *Se $M \subset \mathbb{R}^n$ é uma variedade-m com bordo compacta e orientável e $\omega \in \Omega^{m-1}(\mathbb{R}^n)$ então*
$$\int_M d\omega = \int_{\partial M} \omega,$$
onde ∂M tem a orientação induzida.

Dem: Começamos por decompor M em imagens de cubos por parametrizações positivas. Como integrais ao longo de faces adjacentes correspondem a orientações opostas, e portanto cancelam, podemos assumir sem perda de generalidade que M é a imagem de um cubo.

Seja $\mathbf{g} : [0,1]^m \to M$ a parametrização. Uma vez que

$$\int_M d\omega = \int_{[0,1]^m} \mathbf{g}^*(d\omega) = \int_{[0,1]^m} d(\mathbf{g}^*\omega)$$

e

$$\int_{\partial M} \omega = \int_{\partial[0,1]^m} \mathbf{g}^*\omega,$$

basta provar o Teorema de Stokes no caso em que $M = [0,1]^m$. Se $\omega \in \Omega^{m-1}(\mathbb{R}^m)$ então

$$\omega = \sum_{i=1}^{m} \omega_i(\mathbf{x})\, dx^1 \wedge \ldots \wedge \widehat{dx^i} \wedge \ldots \wedge dx^m,$$

e portanto

$$d\omega = \sum_{i=1}^{m} (-1)^{i-1} \frac{\partial \omega_i}{\partial x^i}\, dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^m.$$

Consequentemente,

$$\begin{aligned}
\int_{[0,1]^m} d\omega &= \sum_{i=1}^{m} (-1)^{i-1} \int_{[0,1]^m} \frac{\partial \omega_i}{\partial x^i}\, dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^m \\
&= \sum_{i=1}^{m} (-1)^{i-1} \int_{[0,1]^m} \frac{\partial \omega_i}{\partial x^i}\, dx^1 \ldots dx^m \\
&= \sum_{i=1}^{m} (-1)^{i-1} \left(\int_{\{x^i=1\}} \omega_i\, dx^1 \ldots \widehat{dx^i} \ldots dx^m - \int_{\{x^i=0\}} \omega_i\, dx^1 \ldots \widehat{dx^i} \ldots dx^m \right) \\
&= \int_{\partial[0,1]^m} \omega,
\end{aligned}$$

onde usámos a definição de orientação induzida (note-se que cada troca de funções coordenadas inverte a orientação). $\square$

Corolário 3.9 *Se M é uma variedade-m (sem bordo) compacta e orientável e $\omega \in \Omega^{m-1}(\mathbb{R}^n)$ então*

$$\oint_M d\omega = 0.$$

Exemplo 3.10 *Se M é um domínio regular em $\mathbb{R}^2$ e $\omega = Pdx + Qdy \in \Omega^1(\mathbb{R}^2)$, temos*

$$d\omega = \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx \wedge dy$$

e portanto o Teorema de Stokes reduz-se ao Teorema de Green:

$$\iint_M \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx \wedge dy = \oint_{\partial M} Pdx + Qdy.$$

Exemplo 3.11 *Todo o Cálculo Vectorial em $\mathbb{R}^3$ pode ser reinterpretado em termos de formas diferenciais:*

(i) Produtos:

$$\begin{aligned}
&\omega_{\phi\mathbf{F}} = \phi\,\omega_{\mathbf{F}};\\
&\omega_{\mathbf{F}\times\mathbf{G}} = \omega_{\mathbf{F}} \wedge \omega_{\mathbf{G}};\\
&\omega_{\langle\mathbf{F},\mathbf{G}\rangle} = \Omega_{\mathbf{F}} \wedge \omega_{\mathbf{G}} = \omega_{\mathbf{F}} \wedge \Omega_{\mathbf{G}}.
\end{aligned}$$

(ii) Derivadas:

$$\begin{aligned}
&\omega_{\operatorname{grad}\phi} = d\phi;\\
&\Omega_{\operatorname{rot}\mathbf{F}} = d\omega_{\mathbf{F}};\\
&(\operatorname{div}\mathbf{F})\,dx \wedge dy \wedge dz = d\Omega_{\mathbf{F}}.
\end{aligned}$$

(iii) Integrais:

$$\begin{aligned}
&\int_M \langle\mathbf{F}, d\mathbf{g}\rangle = \int_M \omega_{\mathbf{F}};\\
&\int_M \langle\mathbf{F}, \mathbf{n}\rangle = \int_M \Omega_{\mathbf{F}}.
\end{aligned}$$

(iv) Teoremas sobre derivadas:

$$\begin{aligned}
&\operatorname{rot}(\operatorname{grad}\phi) = \mathbf{0} \quad \Leftrightarrow \quad d(d\phi) = 0;\\
&\operatorname{div}(\operatorname{rot}\mathbf{F}) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad d(d\omega_{\mathbf{F}}) = 0.
\end{aligned}$$

(v) Teoremas sobre integrais:

$$\begin{aligned}
&\int_M \langle\operatorname{grad}\phi, d\mathbf{g}\rangle = \phi(\mathbf{b}) - \phi(\mathbf{a}) \quad \Leftrightarrow \quad \int_M d\phi = \phi(\mathbf{b}) - \phi(\mathbf{a});\\
&\iint_M \langle\operatorname{rot}\mathbf{F}, \mathbf{n}\rangle = \oint_{\partial M} \langle\mathbf{F}, \mathbf{dg}\rangle \quad \Leftrightarrow \quad \int_M d\omega_{\mathbf{F}} = \oint_{\partial M} \omega_{\mathbf{F}};\\
&\iiint_M \operatorname{div}\mathbf{F} = \oiint_{\partial M} \langle\mathbf{F}, \mathbf{n}\rangle \quad \Leftrightarrow \quad \int_M d\Omega_{\mathbf{F}} = \oint_{\partial M} \Omega_{\mathbf{F}}.
\end{aligned}$$

4 Cálculo vectorial em coordenadas curvilíneas

Se $\mathbf{g} : U \to \mathbb{R}^n$ é uma transformação de coordenadas então podemos pensar nas novas coordenadas $t^1, \ldots, t^n$ como campos escalares em $\mathbb{R}^n$. Tem-se

$$dt^i \left(\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial t^j}\right) = \frac{\partial t^i}{\partial t^j} = \delta_{ij},$$

onde $\delta_{ij} = 1$ se $i = j$ e $\delta_{ij} = 0$ se $i \neq j$ (**delta de Kronecker**). Definindo as formas-1

$$\omega_i = \sum_{j=1}^n g_{ij} dt^j,$$

onde

$$g_{ij} = \left\langle \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial t^i}, \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial t^j} \right\rangle$$

são as componentes da **matriz da métrica** G, vemos que

$$\omega_i \left(\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial t^j} \right) = \left\langle \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial t^i}, \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial t^j} \right\rangle,$$

ou seja, ω_i é a forma-1 associada a $\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial t^j}$.

Exemplo 4.1 *Recorde-se que as* **coordenadas cilíndricas** *em* $\mathbb{R}^3$ *correspondem à transformação de coordenadas* $\mathbf{g} : \mathbb{R}^+ \times]0, 2\pi[\times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ *dada por*

$$\mathbf{g}(\rho, \varphi, z) = (\rho \cos \varphi, \rho \operatorname{sen} \varphi, z).$$

A matriz da métrica vem

$$G = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \rho^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

e portanto $\left\{ \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \rho}, \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \varphi}, \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial z} \right\}$ *é uma base ortogonal associada às formas* $\left\{ d\rho, \rho^2 d\varphi, dz \right\}$*. A respectiva base ortonormal* $\{\mathbf{e}_\rho, \mathbf{e}_\varphi, \mathbf{e}_z\}$ *satisfaz*

$$\begin{aligned}
\mathbf{e}_\rho &= \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \rho} \sim d\rho \sim \mathbf{e}_\varphi \times \mathbf{e}_z \sim \rho \, d\varphi \wedge dz; \\
\mathbf{e}_\varphi &= \frac{1}{\rho} \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \varphi} \sim \rho \, d\varphi \sim \mathbf{e}_z \times \mathbf{e}_\rho \sim dz \wedge d\rho; \\
\mathbf{e}_z &= \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial z} \sim dz \sim \mathbf{e}_\rho \times \mathbf{e}_\varphi \sim \rho \, d\rho \wedge d\varphi
\end{aligned}$$

(onde escrevemos $\mathbf{F} \sim \omega_{\mathbf{F}} \sim \Omega_{\mathbf{F}}$*). Tem-se ainda do Teorema de Mudança de Variáveis*

$$dx \wedge dy \wedge dz = \rho \, d\rho \wedge d\varphi \wedge dz.$$

Para calcular por exemplo

$$\triangle \phi = \operatorname{div}(\operatorname{grad} \phi)$$

em coordenadas cilíndricas notamos que

$$\begin{aligned}
\operatorname{grad} \phi \sim d\phi &= \frac{\partial \phi}{\partial \rho} d\rho + \frac{\partial \phi}{\partial \varphi} d\varphi + \frac{\partial \phi}{\partial z} dz \\
&\sim \frac{\partial \phi}{\partial \rho} \rho \, d\varphi \wedge dz + \frac{\partial \phi}{\partial \varphi} \frac{1}{\rho} dz \wedge d\rho + \frac{\partial \phi}{\partial z} \rho \, d\rho \wedge d\varphi,
\end{aligned}$$

pelo que

$$\begin{aligned}
\triangle \phi \, \rho \, d\rho \wedge d\varphi \wedge dz &= d \left(\frac{\partial \phi}{\partial \rho} \rho \, d\varphi \wedge dz + \frac{\partial \phi}{\partial \varphi} \frac{1}{\rho} dz \wedge d\rho + \frac{\partial \phi}{\partial z} \rho \, d\rho \wedge d\varphi \right) \\
&= \left(\frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial \phi}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \varphi^2} + \rho \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} \right) d\rho \wedge d\varphi \wedge dz,
\end{aligned}$$

ou seja:

$$\triangle\phi = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial\phi}{\partial\rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial\varphi^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}.$$

Exemplo 4.2 *Recorde-se que as* **coordenadas esféricas** *em* $\mathbb{R}^3$ *correspondem à transformação de coordenadas* $\mathbf{g} : \mathbb{R}^+ \times]0,\pi[\times]0,2\pi[\to \mathbb{R}^3$ *dada por*

$$\mathbf{g}(r,\theta,\varphi) = (r\operatorname{sen}\theta\cos\varphi, r\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\varphi, r\cos\theta).$$

A matriz da métrica vem

$$G = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & r^2\operatorname{sen}^2\theta \end{bmatrix}$$

e portanto $\left\{\frac{\partial\mathbf{g}}{\partial r}, \frac{\partial\mathbf{g}}{\partial\theta}, \frac{\partial\mathbf{g}}{\partial\varphi}\right\}$ *é uma base ortogonal associada às formas* $\left\{dr, r^2 d\theta, r^2\operatorname{sen}^2\theta d\varphi\right\}$. *A respectiva base ortonormal satisfaz*

$$\begin{aligned}
\mathbf{e}_r &= \frac{\partial\mathbf{g}}{\partial r} \sim dr \sim \mathbf{e}_\theta \times \mathbf{e}_\varphi \sim r^2\operatorname{sen}\theta\, d\theta \wedge d\varphi; \\
\mathbf{e}_\theta &= \frac{1}{r}\frac{\partial\mathbf{g}}{\partial\theta} \sim r\, d\theta \sim \mathbf{e}_\varphi \times \mathbf{e}_r \sim r\operatorname{sen}\theta\, d\varphi \wedge dr; \\
\mathbf{e}_\varphi &= \frac{1}{r\operatorname{sen}\theta}\frac{\partial\mathbf{g}}{\partial\varphi} \sim r\operatorname{sen}\theta\, d\varphi \sim \mathbf{e}_r \times \mathbf{e}_\theta \sim r\, dr \wedge d\theta.
\end{aligned}$$

Tem-se ainda do Teorema de Mudança de Variáveis

$$dx \wedge dy \wedge dz = r^2\operatorname{sen}\theta\, dr \wedge d\theta \wedge d\varphi.$$

Para calcular por exemplo

$$\triangle\phi = \operatorname{div}(\operatorname{grad}\phi)$$

em coordenadas esféricas notamos que

$$\begin{aligned}
\operatorname{grad}\phi \sim d\phi &= \frac{\partial\phi}{\partial r}\, dr + \frac{\partial\phi}{\partial\theta}\, d\theta + \frac{\partial\phi}{\partial\varphi}\, d\varphi \\
&\sim \frac{\partial\phi}{\partial r} r^2\operatorname{sen}\theta\, d\theta \wedge d\varphi + \frac{\partial\phi}{\partial\theta}\operatorname{sen}\theta\, d\varphi \wedge dr + \frac{\partial\phi}{\partial\varphi}\frac{1}{\operatorname{sen}\theta}\, dr \wedge d\theta,
\end{aligned}$$

pelo que

$$\begin{aligned}
\triangle\phi\, r^2\operatorname{sen}\theta\, dr \wedge d\theta \wedge d\varphi &= d\left(\frac{\partial\phi}{\partial r} r^2\operatorname{sen}\theta\, d\theta \wedge d\varphi + \frac{\partial\phi}{\partial\theta}\operatorname{sen}\theta\, d\varphi \wedge dr + \frac{\partial\phi}{\partial\varphi}\frac{1}{\operatorname{sen}\theta}\, dr \wedge d\theta\right) \\
&= \left(\operatorname{sen}\theta\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\phi}{\partial r}\right) + \frac{\partial}{\partial\theta}\left(\operatorname{sen}\theta\frac{\partial\phi}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\operatorname{sen}\theta}\frac{\partial^2\phi}{\partial\varphi^2}\right) dr \wedge d\theta \wedge d\varphi,
\end{aligned}$$

ou seja:

$$\triangle\phi = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\phi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\operatorname{sen}\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\operatorname{sen}\theta\frac{\partial\phi}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\operatorname{sen}^2\theta}\frac{\partial^2\phi}{\partial\varphi^2}.$$