Cálculo Diferencial e Integral II

Exercício Teórico 6

1. Seja $U \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto. Diz-se que dois caminhos fechados $\mathbf{g}, \mathbf{h} : [a, b] \to U$ são **caminhos homotópicos** em U se existe uma função contínua $\mathbf{H} : [a, b] \times [0, 1] \to U$ (dita uma **homotopia**) tal que $\mathbf{H}(t, 0) = \mathbf{g}(t)$ e $\mathbf{H}(t, 1) = \mathbf{h}(t)$ para todo o $t \in [a, b]$ e $\mathbf{H}(a, s) = \mathbf{H}(b, s)$ para todo o $s \in [0, 1]$. Mostre que se $\mathbf{F} : U \to \mathbb{R}^n$ é um campo vectorial de classe C^1 **fechado** e $\mathbf{g}, \mathbf{h} : [a, b] \to U$ são caminhos de classe C^1 homotópicos por uma homotopia de classe C^2 então

$$\oint_{\mathbf{g}([a,b])} \langle \mathbf{F}, d\mathbf{g} \rangle = \oint_{\mathbf{h}([a,b])} \langle \mathbf{F}, d\mathbf{h} \rangle.$$

Sugestão: Prove que é constante a função

$$I(s) = \int_a^b \left\langle \mathbf{F}(\mathbf{H}(t, s)), \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}(t, s) \right\rangle dt.$$

2. Usando o Teorema de Green, prove o Teorema de Stokes para campos vectoriais em variedades-2 que são gráficos de funções $z = f(x, y)$ de classe C^2.