Cálculo Diferencial e Integral II

Exercício Teórico 3

1. (a) Mostre que se $A \subset \mathbb{R}^n$ é compacto e $f : A \to \mathbb{R}$ é contínua então f é **uniformemente contínua**, isto é, para todo o $\varepsilon > 0$ existe $r > 0$ tal que

$$\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| < r \Rightarrow |f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y})| < \varepsilon.$$

   (b) Mostre que se $I \subset \mathbb{R}^n$ é um intervalo compacto e $f : I \to \mathbb{R}$ é contínua então o gráfico de f tem medida nula em $\mathbb{R}^{n+1}$.

2. Prove parte do **critério de integrabilidade de Lebesgue**: Se $I \subset \mathbb{R}^n$ é um intervalo compacto e a função limitada $f : I \to \mathbb{R}$ é integrável então o conjunto D dos seus pontos de descontinuidade tem medida nula.

   Sugestão: Comece por provar que

$$D = \{\mathbf{x} \in I : \operatorname{osc}(f, \mathbf{x}) > 0\} = \bigcup_{k=1}^{+\infty} \left\{\mathbf{x} \in I : \operatorname{osc}(f, \mathbf{x}) > \frac{1}{k}\right\},$$

   onde definimos a **oscilação** de f em $\mathbf{x}$ como

$$\operatorname{osc}(f, \mathbf{x}) = \lim_{r \to 0} \Big(\sup\{f(\mathbf{x}) : \mathbf{x} \in B_r(\mathbf{x}) \cap I\} - \inf\{f(\mathbf{x}) : \mathbf{x} \in B_r(\mathbf{x}) \cap I\} \Big).$$