

Cálculo Diferencial e Integral II
Teste 2 - 15 de Janeiro de 2011 - 9h - Versão 1
Duração: 90 minutos

Apresente e justifique todos os cálculos

1. Considere o sólido

$$D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 < 2, z > 1\}.$$

- (3 val.) (a) Escreva uma expressão para o volume de D como uma soma de integrais iterados da forma $\int (\int (\int dx) dy) dz$.

Resolução: De $z^2 < 2 - x^2 - y^2$ vemos que $z < \sqrt{2}$. Por outro lado, os cortes de z constante são dados pela condição $x^2 + y^2 < 2 - z^2$, ou seja, são círculos de raio $\sqrt{2 - z^2}$. Consequentemente, o volume de D é dado pelo integral iterado

$$V_3(D) = \int_1^{\sqrt{2}} \left(\int_{-\sqrt{2-z^2}}^{\sqrt{2-z^2}} \left(\int_{-\sqrt{2-z^2-y^2}}^{\sqrt{2-z^2-y^2}} 1 dx \right) dy \right) dz.$$

- (3 val.) (b) Calcule o volume de D utilizando coordenadas cilíndricas.

Resolução: Em coordenadas cilíndricas (ρ, φ, z) o sólido é descrito pela condição $\rho^2 + z^2 < 2$. Recordando que o Jacobiano destas coordenadas é ρ , temos

$$V_3(D) = \int_0^{2\pi} \int_1^{\sqrt{2}} \int_0^{\sqrt{2-z^2}} \rho d\rho dz d\varphi = \pi \int_1^{\sqrt{2}} (2 - z^2) dz = \frac{(4\sqrt{2} - 5)\pi}{3}.$$

- (3 val.) (c) Calcule a área da fronteira de D .

Resolução: A fronteira de D é formada por um círculo de raio 1, contido no plano $z = 1$, e por um pedaço S de superfície esférica. A área do círculo é obviamente π . Para calcularmos a área de S escolhemos a parametrização $g :]0, \frac{\pi}{4}[\times]0, 2\pi[\rightarrow \mathbb{R}^3$ dada pelas coordenadas esféricas (θ, φ) :

$$g(\theta, \varphi) = \left(\sqrt{2} \operatorname{sen} \theta \cos \varphi, \sqrt{2} \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \varphi, \sqrt{2} \cos \theta \right).$$

Para esta parametrização temos

$$\det(Dg^t Dg) = \det \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \operatorname{sen}^2 \theta \end{pmatrix} = 4 \operatorname{sen}^2 \theta.$$

Portanto

$$V_2(S) = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^{2\pi} \sqrt{\det(Dg^t Dg)} d\varphi d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^{2\pi} 2 \operatorname{sen} \theta d\varphi d\theta = (4 - 2\sqrt{2}) \pi,$$

pelo que a área da fronteira de D vem

$$V_2(\partial D) = \pi + V_2(S) = (5 - 2\sqrt{2}) \pi.$$

2. Indique, justificando, se cada uma das afirmações seguintes é verdadeira ou falsa:

(1 val.)

(a) O campo vectorial $F(x, y) = (x + y, x - y)$ é um campo fechado.

Resolução: Verdadeira: $\frac{\partial F_2}{\partial x} = 1 = \frac{\partial F_1}{\partial y}$.

(1 val.)

(b) O campo vectorial $F(x, y) = (x + y, x - y)$ é um campo gradiente.

Resolução: Verdadeira, uma vez que é um campo fechado cujo domínio (\mathbb{R}^2) é simplesmente conexo.

(1 val.)

(c) Todo o campo fechado em $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ é gradiente.

Resolução: Falsa: por exemplo, o campo

$$R(x, y) = \left(\frac{-y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2} \right)$$

é um campo fechado em $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ mas não é gradiente (o seu integral ao longo da circunferência $x^2 + y^2 = 1$ percorrida no sentido directo vale $2\pi \neq 0$).

(1 val.)

(d) Todo o campo fechado em $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$ é gradiente.

Resolução: Verdadeira, já que o conjunto $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$ é simplesmente conexo.

3. Considere o campo vectorial

$$G(x, y, z) = (yz, -xz, z^2)$$

e a superfície

$$S = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \sqrt{x^2 + y^2} = 1 + z, 0 < z < 1 \right\}.$$

Calcule o fluxo do rotacional de G , $\text{rot } G$, através de S , segundo a normal com terceira componente negativa, usando:

(2 val.)

(a) O Teorema de Stokes;

Resolução: De acordo com o Teorema de Stokes, temos

$$\int_S (\text{rot } G) \cdot n = \int_{\partial S} G \cdot dg.$$

O bordo de S é formado por duas circunferências C_0 e C_1 , de raios 1 e 2, contidas nos planos $z = 0$ e $z = 1$. Uma vez que a normal pretendida é a que aponta para longe do eixo dos zz , C_0 deve ser orientada no sentido directo (anti-horário) e C_1 no sentido inverso (horário), quando vistas de cima. Usando as parametrizações $g_0, g_1 : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3$ dadas por

$$g_0(t) = (\cos t, \sin t, 0) \quad g_1(t) = (2 \cos t, 2 \sin t, 1)$$

(onde g_1 induz a orientação contrária à pretendida) temos então

$$\begin{aligned} \int_S (\text{rot } G) \cdot n &= \int_{\partial S} G \cdot dg = \int_0^{2\pi} G(g_0(t)) \cdot \frac{dg_0}{dt}(t) dt - \int_0^{2\pi} G(g_1(t)) \cdot \frac{dg_1}{dt}(t) dt \\ &= \int_0^{2\pi} (0, 0, 0) \cdot (-\sin t, \cos t, 0) dt - \int_0^{2\pi} (2 \sin t, -2 \cos t, 1) \cdot (-2 \sin t, 2 \cos t, 0) dt \\ &= \int_0^{2\pi} 4 dt = 8\pi. \end{aligned}$$

(2 val.)

(b) O Teorema da Divergência.

Resolução: Uma vez que o Teorema da Divergência só se aplica a superfícies que são fronteira de domínios regulares, acrescentamos à superfície S os círculos

$$T_0 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = 0 \text{ e } x^2 + y^2 \leq 1\};$$
$$T_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = 1 \text{ e } x^2 + y^2 \leq 4\}.$$

Em conjunto, as três superfícies formam a fronteira de um domínio regular D . Pelo Teorema da Divergência (notando que a normal indicada no enunciado coincide com a normal exterior) temos

$$\int_D \operatorname{div}(\operatorname{rot} G) = \int_S (\operatorname{rot} G) \cdot n + \int_{T_1} (\operatorname{rot} G) \cdot (0, 0, 1) + \int_{T_0} (\operatorname{rot} G) \cdot (0, 0, -1).$$

Uma vez que $\operatorname{div}(\operatorname{rot} G) = 0$ e

$$\operatorname{rot} G = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ yz & -xz & z^2 \end{vmatrix} = (x, y, -2z),$$

temos

$$0 = \int_S (\operatorname{rot} G) \cdot n + \int_{T_1} (-2) + \int_{T_0} 0 \Leftrightarrow \int_S (\operatorname{rot} G) \cdot n = 2V_2(T_1) = 8\pi.$$

(3 val.)

4. Seja $M \subset \mathbb{R}^3$ uma superfície e $H : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ um campo vectorial de classe C^1 ortogonal a M (ou seja, $H(x) \in T_x^\perp M$ para todo o $x \in M$). Mostre que $\operatorname{rot} H$ é um campo vectorial tangente a M em cada ponto.

Resolução: Se $\operatorname{rot} H$ não fosse tangente a M nalgum ponto $x_0 \in M$ então teríamos $(\operatorname{rot} H)(x_0) \cdot n(x_0) > 0$ para uma certa normal unitária n localmente definida. Uma vez que H é de classe C^1 , e portanto $\operatorname{rot} H$ é contínuo, existiria um aberto $U \ni x_0$ tal que $(\operatorname{rot} H)(x) \cdot n(x) > 0$ para $x \in U \cap M$. Tomando uma curva simples fechada $C \subset U \cap M$ teríamos então

$$\oint_C H \cdot dg = \int_M (\operatorname{rot} H) \cdot n > 0,$$

sendo $S \subset U \cap M$ a região em M com bordo C . Mas isto é uma contradição, uma vez que como H é ortogonal a M temos

$$\oint_C H \cdot dg = \int_a^b H(g(t)) \cdot \frac{dg}{dt}(t) dt = 0,$$

já que $\frac{dg}{dt}(t)$ é tangente a M para qualquer parametrização $g : [a, b] \rightarrow M$ de C . Concluímos que $\operatorname{rot} H$ tem que ser tangente a M em todos os pontos.