

Cálculo Diferencial e Integral II  
Teste 1 - 7 de Novembro de 2009 - 11h - Versão 1  
Duração: 90 minutos

Resolução abreviada

- (2 val.) 1. Calcule ou mostre que não existe o limite

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^5 + y^5}{x^4 + y^4}.$$

**Resolução:** Começamos por ver que os limites direccionais na origem, segundo rectas  $y = mx$  são todos iguais a 0:

$$\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ y=mx}} \frac{x^5 + y^5}{x^4 + y^4} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^5 + m^5 x^5}{x^4 + m^4 x^4} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + m^5 x}{1 + m^4} = 0.$$

Logo se existir limite, ele terá que ser zero. Uma vez que

$$\left| \frac{x^5 + y^5}{x^4 + y^4} \right| \leq \frac{x^4|x| + y^4|y|}{x^4 + y^4} \leq |x| + |y| \leq 2\|(x, y)\|,$$

podemos concluir que o limite existe e é igual a 0.

- (3 val.) 2. Sejam  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$  e  $g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  as funções

$$f(t) = (1 + t^3, 1 + \sin t, \log(1 + t)) \quad \text{e} \quad g(x, y, z) = e^{xyz} - 1.$$

Calcule  $D(g \circ f)(0)$  e  $D(f \circ g)(1, 1, 0)$ .

**Resolução:** Sendo  $f$  diferenciável no ponto  $0 = g(1, 1, 0)$  e  $g$  diferenciável no ponto  $(1, 1, 0) = f(0)$ , temos, pelo regra da derivação da função composta:

$$\begin{aligned} D(g \circ f)(0) &= Dg(f(0))Df(0) \\ &= [0 \ 0 \ 1] \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 1 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} D(f \circ g)(1, 1, 0) &= Df(g(1, 1, 0))Dg(1, 1, 0) \\ &= \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} [0 \ 0 \ 1] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

- (3 val.) 3. Determine e classifique os pontos de estacionaridade do campo escalar  $h : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  definido por

$$h(x, y, z) = 2x - 6y + 6z - x^2 - 2y^2 - 2yz - 2z^2.$$

**Resolução:** Os pontos de estacionaridade de  $f$  satisfazem:

$$\nabla h(x, y, z) = (2 - 2x, -6 - 4y - 2z, 6 - 2y - 4z) = (0, 0, 0).$$

Obtemos a solução  $(x, y, z) = (1, -3, 3)$ . A matriz Hessiana de  $h$  é dada por

$$H_h(1, -3, 3) = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & -2 \\ 0 & -2 & -4 \end{bmatrix},$$

donde podemos concluir de imediato que  $\lambda = -2$  é um valor próprio da matriz. Podemos considerar a submatriz

$$A = \begin{bmatrix} -4 & -2 \\ -2 & -4 \end{bmatrix}$$

e uma vez que  $\det A = 12 > 0$  e o traço de  $A$  é  $-8 < 0$  podemos concluir que os valores próprios da matriz  $A$  são ambos negativos e portanto os valores próprios de  $H_h(1, -3, 3)$  são todos negativos. Logo o ponto  $(1, -3, 3)$  é um ponto de máximo relativo.

4. Considere o conjunto

$$L = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = z^2 + 1 \text{ e } x + 2z = 1\}.$$

- (2 val.) (a) Mostre que  $L$  é uma variedade e indique a sua dimensão.

**Resolução:** A função  $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$  dada por  $F(x, y, z) = (x^2 + y^2 - z^2 - 1, x + 2z - 1)$  é de classe  $C^1$ , e a sua matriz jacobiana é

$$DF(x, y, z) = \begin{bmatrix} 2x & 2y & -2z \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Esta matriz possui característica inferior a 2 nos pontos  $(x, y, z)$  tais que

$$(2x, 2y, -2z) = t(1, 0, 2)$$

para algum  $t \in \mathbb{R}$ , ou seja, nos pontos da forma  $(x, y, z) = (\frac{t}{2}, 0, -t)$ . Mas estes pontos não pertencem a  $L$ , porque não satisfazem a primeira equação. Logo  $L$  é uma variedade diferenciável de dimensão  $3 - 2 = 1$ .

- (2 val.) (b) Determine uma base para o espaço tangente a  $L$  no ponto  $(-1, 1, 1)$ .

**Resolução:** O espaço normal a  $L$  no ponto  $(-1, 1, 1)$  é dado por

$$T_{(-1,1,1)}^\perp L = \mathcal{L}\{\nabla F_1(-1, 1, 1), \nabla F_2(-1, 1, 1)\} = \mathcal{L}\{(-2, 2, -2), (1, 0, 2)\}.$$

O espaço tangente a  $L$  no ponto  $(-1, 1, 1)$  será então

$$\begin{aligned} T_{(-1,1,1)} L &= \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 : (-2, 2, -2) \cdot (a, b, c) = 0 \text{ e } (1, 0, 2) \cdot (a, b, c) = 0\} \\ &= \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 : -a + b - c = 0 \text{ e } a + 2c = 0\} \\ &= \{(-2c, -c, c) : c \in \mathbb{R}\} = \mathcal{L}\{(-2, -1, 1)\}. \end{aligned}$$

(3 val.)

(c) Determine o ponto de  $L$  mais afastado da origem.

**Resolução:** Devemos maximizar a função

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$$

(quadrado da distância à origem) sobre  $L$ . Para tal consideramos a função auxiliar

$$f + \lambda_1 F_1 + \lambda_2 F_2 = x^2 + y^2 + z^2 + \lambda_1(x^2 + y^2 - z^2 - 1) + \lambda_2(x + 2z - 1)$$

e resolvemos o sistema de equações

$$\begin{cases} \nabla(f + \lambda_1 F_1 + \lambda_2 F_2) = 0 \\ F = (0, 0) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 2\lambda_1 x + \lambda_2 = 0 \\ 2y + 2\lambda_1 y = 0 \\ 2z - 2\lambda_1 z + 2\lambda_2 = 0 \\ x^2 + y^2 - z^2 - 1 = 0 \\ x + 2z - 1 = 0 \end{cases}$$

Da segunda equação vemos que  $y = 0$  ou  $\lambda_1 = -1$ . Se  $\lambda_1 = -1$  então da primeira equação vem  $\lambda_2 = 0$ , e da terceira  $z = 0$ , pelo que as duas últimas equações implicam  $x = 1$  e  $y = 0$ . Se  $y = 0$  então as duas últimas equações implicam  $z = 0$  e  $x = 1$  ou  $z = \frac{4}{3}$  e  $x = -\frac{5}{3}$ . Deste modo obtemos dois pontos de estacionaridade,  $(1, 0, 0)$  e  $(-\frac{5}{3}, 0, \frac{4}{3})$ . Uma vez que  $L$  é compacta e  $f$  é contínua, o Teorema de Weierstrass garante que um destes pontos será o máximo e o outro o mínimo de  $f$  em  $L$ . Dado que  $f(1, 0, 0) = 1$  e  $f(-\frac{5}{3}, 0, \frac{4}{3}) = \frac{41}{9}$ , concluímos que o ponto mais afastado da origem é o ponto  $(-\frac{5}{3}, 0, \frac{4}{3})$ .

(2 val.)

(d) Mostre que  $L$  é o gráfico de uma função  $(x, y) = f(z)$  numa vizinhança do ponto  $(-1, 1, 1)$  e calcule  $f'(1)$ .

**Resolução:** Consideramos de novo a função  $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$  dada por

$$F(x, y, z) = (x^2 + y^2 - z^2 - 1, x + 2z - 1).$$

Esta função é de classe  $C^1$  e satisfaz  $F(-1, 1, 1) = (0, 0)$  e

$$\det \frac{\partial F}{\partial(x, y)}(-1, 1, 1) = \begin{bmatrix} 2x & 2y \\ 1 & 0 \end{bmatrix}_{|(-1, 1, 1)} = \det \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = -2 \neq 0.$$

Pelo Teorema da Função Implícita, sabemos então que  $L$  é o gráfico de uma função  $(x, y) = f(z)$  numa vizinhança do ponto  $(-1, 1, 1)$ . Além disso,

$$\begin{aligned} f'(0) &= - \left( \frac{\partial F}{\partial(x, y)}(-1, 1, 1) \right)^{-1} \frac{\partial F}{\partial z}(-1, 1, 1) = - \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -2z \\ 2 \end{bmatrix}_{|(-1, 1, 1)} \\ &= - \frac{1}{(-2)} \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

- (3 val.) 5. Seja  $M \subset \mathbb{R}^n$  um conjunto fechado e  $x \in \mathbb{R}^n \setminus M$ . Mostre que existe um ponto  $y \in M$  cuja distância a  $x$  é mínima. Mostre ainda que se  $M$  é uma variedade então a recta que contém  $x$  e  $y$  é normal a  $M$  em  $y$ .

**Resolução:** O conjunto de números reais positivos

$$D = \{\|x - z\| : z \in M\}$$

possui ínfimo  $d \geq 0$ . Seja  $z_k$  uma sucessão de pontos em  $M$  tal que  $\|x - z_k\| \rightarrow d$ . Então a sucessão  $z_k$  é limitada, e portanto pelo Teorema de Bolzano-Weierstrass admite uma subsucessão  $y_k$  convergente. Seja  $y$  o limite desta sucessão. Como  $M$  é um conjunto fechado,  $y \in M$ . Por outro lado,

$$\|x - y\| = \|x - \lim y_k\| = \lim \|x - y_k\| = d,$$

e portanto  $\|x - y\| \leq \|x - z\|$  para todo o  $z \in M$ .

Uma vez que  $y$  é um ponto de mínimo da função  $f(z) = \|z - x\|^2$  sobre  $M$ , sabemos que se  $M$  é uma variedade então  $\nabla f(y) \in T_y^\perp M$ . Mas é fácil ver que  $\nabla f(z) = 2(z - x)$ , pelo que  $y - x \in T_y^\perp M$ , e portanto a recta que une  $x$  a  $y$  é normal a  $M$  em  $y$ .