

CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL II
TODOS OS CURSOS EXCEPTO MEBIOM, MEFT, LMAC, MEEC E MEAMB
TESTE DE RECUPERAÇÃO 2 - VERSÃO 2 - 26 DE JUNHO DE 2009 - DURAÇÃO:
90 MINUTOS

Apresente e justifique todos os cálculos

(2 val.)

- (1) (a) Mostre que o conjunto

$$E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : -x^2 + 2y^2 + z^2 + 1 = 0, 2x - 2y - 2 = 0\},$$

é uma variedade e determine a sua dimensão.

(2 val.)

- (b) Determine o espaço tangente a E no ponto $(2, 1, 1)$.

(2 val.)

- (c) Mostre que a função $f(x, y, z) = y$ na variedade E tem máximo e mínimo. Determine-os.

- (2) Seja

$$B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 1 - x^2 - z^2 \leq y \leq 3 - x^2 - z^2, x^2 + z^2 < 1\}.$$

(2 val.)

- (a) Escreva uma expressão para o volume de B na forma $\int (\int (\int \dots dy) dx) dz$

(2 val.)

- (b) Calcule o momento de inércia de B , em relação ao eixo O_y , sabendo que a densidade de massa de B é $\sigma = 3$.

(2 val.)

- (3) Calcule $\oint_E G \cdot dg$, onde $G(x, y) = (\sin(x^2), \cos(y^2) - 2x)$ e a curva E é a elipse, $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + \frac{y^2}{4} = 1\}$, percorrida no sentido horário.

- (4) Considere a superfície

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = x^2 + y^2 - 2, z < 2\},$$

orientada com normal unitária, n_A , com terceira componente negativa.

(2 val.)

- (a) Calcule a massa de A sabendo que a densidade de massa é $\sigma = \sqrt{1 + 4(x^2 + y^2)}$.

(1 val.)

- (b) Calcule o fluxo do campo $H(x, y, z) = (0, y, z)$ através de A .

(2 val.)

- (c) Calcule, usando o teorema de Stokes, o fluxo do campo $\text{rot}(G)$ através de A , onde $G = (0, x, 0)$.

(3 val.)

- (5) Seja $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 e tal que $h(0, x) = 0, \forall x \in \mathbb{R}$. Mostre, usando o teorema de Fubini, que a função

$$H(t) = \int_0^1 h(t, x) dx$$

é diferenciável e a sua derivada é dada por

$$\frac{dH}{dt}(t) = \int_0^1 \frac{\partial h}{\partial t}(t, x) dx.$$

Admita que a função no segundo membro, $g(t) = \int_0^1 \frac{\partial h}{\partial t}(t, x) dx$, é contínua.