Variedades e Extremos Condicionados (Resolução Sumária)

30 de Abril de 2013

1. Mostre que os seguintes conjuntos são variedades e indique a respectiva dimensão:

   (a) $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2-z^2=1\}$;
   Resolução: O conjunto é $F^{-1}(0)$, onde

   $$F(x,y,z) = x^2+y^2-z^2-1.$$

   Uma vez que

   $$DF(x,y,z) = \begin{bmatrix} 2x & 2y & -2z \end{bmatrix}$$

   só não tem característica máxima (i.e., 1) no ponto $(0,0,0)$, que não pertence a $F^{-1}(0)$ (porque $F(0,0,0)=-1$), vemos que cada ponto de $F^{-1}(0)$ possui uma vizinhança na qual a característica de DF é máxima. Portanto $F^{-1}(0)$ é uma variedade de dimensão $3-1=2$.

   (b) $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2 = x+y+z = 1\}$;
   Resolução: O conjunto é $\mathbf{F}^{-1}(\mathbf{0})$, onde

   $$\mathbf{F}(x,y,z) = (x^2+y^2-1, x+y+z-1).$$

   Uma vez que

   $$D\mathbf{F}(x,y,z) = \begin{bmatrix} 2x & 2y & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

   só não tem característica máxima (i.e., 2) quando $x=y=0$, e visto que os pontos desta forma não pertencem a $\mathbf{F}^{-1}(\mathbf{0})$ (porque $\mathbf{F}(0,0,z) = (-1, z+1)$), vemos que cada ponto de $\mathbf{F}^{-1}(\mathbf{0})$ possui uma vizinhança na qual a característica de $D\mathbf{F}$ é máxima. Portanto $\mathbf{F}^{-1}(\mathbf{0})$ é uma variedade de dimensão $3-2=1$.

   (c) $\{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 : z = e^{x^2+y^2}, w = \cos(xy)\}$.
   Resolução: Basta notar que este conjunto é o gráfico da função C^∞ $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por

   $$f(x,y) = \left(e^{x^2+y^2}, \cos(xy)\right).$$

   Portanto o conjunto é uma variedade de dimensão 2.

2. Calcule o espaço tangente e o espaço normal a cada uma das variedades seguintes nos pontos indicados:

(a) $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2-z^2=1\}$, em $(1,0,0)$;
Resolução: Olhando para a linha da matriz Jacobiana da função F calculada no exercício anterior, sabemos que o espaço normal será dado por

$$T^{\perp}_{(1,0,0)}M = \operatorname{span}\{(2,0,0)\} = \operatorname{span}\{(1,0,0)\},$$

onde M designa a variedade. Logo

$$T_{(1,0,0)}M = \operatorname{span}\{(0,1,0),(0,0,1)\}.$$

(b) $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2=x+y+z=1\}$, em $(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 1-\sqrt{2})$;
Resolução: Olhando para as linhas da matriz Jacobiana da função $\mathbf{F}$ calculada no exercício anterior, sabemos que o espaço normal será dado por

$$T^{\perp}_{(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 1-\sqrt{2})}M = \operatorname{span}\{(\sqrt{2},\sqrt{2},0),(1,1,1)\} = \operatorname{span}\{(1,1,0),(1,1,1)\},$$

onde M designa a variedade. Logo

$$\begin{aligned} T_{(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 1-\sqrt{2})}M &= \{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 : a+b=a+b+c=0\} = \\ &= \{(a,-a,0) : a \in \mathbb{R}\} = \operatorname{span}\{(1,-1,0)\}. \end{aligned}$$

(c) $\{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 : z = e^{x^2+y^2}, w = \cos(xy)\}$, em $(0,0,1,1)$.
Resolução: Podemos escrever o conjunto como $\mathbf{F}^{-1}(\mathbf{0})$, onde

$$\mathbf{F}(x,y,z,w) = (z - e^{x^2+y^2}, w - \cos(xy)).$$

Uma vez que

$$D\mathbf{F}(x,y,z,w) = \begin{bmatrix} -2xe^{x^2+y^2} & -2ye^{x^2+y^2} & 1 & 0 \\ y\operatorname{sen}(xy) & x\operatorname{sen}(xy) & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

vemos que o espaço normal será dado por

$$T^{\perp}_{(0,0,1,1)}M = \operatorname{span}\{(0,0,1,0),(0,0,0,1)\},$$

onde M designa a variedade. Logo

$$T_{(0,0,1,1)}M = \operatorname{span}\{(1,0,0,0),(0,1,0,0)\}.$$

3. Escreva a equação do plano ortogonal à curva

$$\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2-z^2=1, 3x+4y-5z=0\}$$

no ponto $(\frac{4}{5}, -\frac{3}{5}, 0)$.

Resolução: A curva é dada por $\mathbf{F}^{-1}(\mathbf{0})$, onde

$$\mathbf{F}(x,y,z) = (x^2+y^2-z^2-1, 3x+4y-5z).$$

Uma vez que

$$D\mathbf{F}(x,y,z) = \begin{bmatrix} 2x & 2y & -2z \\ 3 & 4 & -5 \end{bmatrix},$$

o espaço normal será dado por

$$T^{\perp}_{(\frac{4}{5},-\frac{3}{5},0)}M = \operatorname{span}\{(\frac{8}{5},-\frac{6}{5},0),(3,4,-5)\} = \operatorname{span}\{(4,-3,0),(3,4,-5)\},$$

onde M designa a curva. O espaço tangente será então dado por

$$\begin{aligned} T_{(\frac{4}{5},-\frac{3}{5},0)}M &= \{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 : 4a-3b = 3a+4b-5c = 0\} = \\ &= \{(a,\frac{4}{3}a,\frac{5}{3}a) : a \in \mathbb{R}\} = \operatorname{span}\{(3,4,5)\}, \end{aligned}$$

e portanto o vector $(3,4,5)$ será ortogonal ao plano pedido. Consequentemente, a equação deste plano deverá ser

$$3x+4y+5z = d$$

para algum $d \in \mathbb{R}$. Uma vez que o ponto $(\frac{4}{5},-\frac{3}{5},0)$ tem que satisfazer a equação do plano, concluimos que $d=0$, e portanto a equação é

$$3x+4y+5z = 0.$$

4. Escreva 4 como uma soma de 4 números reais positivos cujo produto seja máximo.

   Queremos maximizar a função

$$f(x,y,z,w) = xyzw$$

   sob a restrição

$$x+y+z+w = 4.$$

   De acordo com a regra dos multiplicadores de Lagrange, devemos procurar os pontos críticos da função

$$F(x,y,z,w) = xyzw + \lambda(x+y+z+w-4).$$

   Uma vez que

$$\nabla F = (yzw+\lambda, xzw+\lambda, xyw+\lambda, xyz+\lambda),$$

   os possíveis pontos de máximo deverão satisfazer

$$\begin{cases} yzw+\lambda = 0 \\ xzw+\lambda = 0 \\ xyw+\lambda = 0 \\ xyz+\lambda = 0 \\ x+y+z+w = 4 \end{cases}$$

   Se alguma das variáveis for zero, o produto será zero e portanto não será máximo; assumindo $xyzw \neq 0$, teremos $\lambda \neq 0$ e portanto dividindo as quatro primeiras equações membro a membro obtém-se $x=y=z=w$, e da última equação vem $x=y=z=w=1$.

A região do hiperplano $x + y + z + w = 4$ na qual $x, y, z, w \geq 0$ é compacta. Portanto sabemos que o máximo da função f naquela região existe; logo, tem que ser o ponto $(1, 1, 1, 1)$.

5. Que dimensões deverá ter uma caixa rectangular de volume V, aberta numa das faces, por forma a que a área da sua superfície seja mínima?

   Resolução: Sejam $x, y, z > 0$ as dimensões da caixa. O volume da caixa será

   $$V = xyz.$$

   Supondo que a face aberta é a face de lados x, y, vemos que a área da caixa será

   $$A(x, y, z) = xy + 2xz + 2yz.$$

   O problema é minimizar a função A sob a restrição $xyz = V$. De acordo com a regra dos multiplicadores de Lagrange, devemos procurar os pontos críticos da função

   $$F(x, y, z) = xy + 2xz + 2yz + \lambda(xyz - V).$$

   Uma vez que
   $$\nabla F = (y + 2z + \lambda yz, x + 2z + \lambda xz, 2x + 2y + \lambda xy),$$
   os possíveis pontos de mínimo deverão satisfazer

   $$\begin{cases} y + 2z + \lambda yz = 0 \\ x + 2z + \lambda xz = 0 \\ 2x + 2y + \lambda xy = 0 \\ xyz = V \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{z} + 2\frac{1}{y} + \lambda = 0 \\ \frac{1}{z} + 2\frac{1}{x} + \lambda = 0 \\ 2\frac{1}{y} + 2\frac{1}{x} + \lambda = 0 \\ xyz = V \end{cases}$$

   e portanto $x = y = 2z$, donde $z = \left(\frac{V}{4}\right)^{\frac{1}{3}}$. Por outras palavras, a caixa deverá ter base quadrada e altura igual a metade do lado do quadrado.

6. Determine o comprimento dos semieixos da elipse de equação $5x^2 + 8xy + 5y^2 = 9$ (**Sugestão:** *Recorde que os eixos de uma elipse a intersectam nos pontos em que a distância ao centro é máxima/mínima*).

   Resolução: De acordo com a sugestão, basta achar os extremos (do quadrado) da distância ao centro da elipse. Uma vez que a elispe é claramente simétrica em relação à origem (se (x, y) satisfaz a equação então $(-x, -y)$ também a satisfaz), devemos então encontrar os extremos da função
   $$f(x, y) = x^2 + y^2$$
   sob a restrição
   $$5x^2 + 8xy + 5y^2 = 9.$$

   De acordo com a regra dos multiplicadores de Lagrange, devemos procurar os pontos críticos da função
   $$F(x, y) = x^2 + y^2 + \lambda(5x^2 + 8xy + 5y^2 - 9).$$

Uma vez que

$$\nabla F = (2x + 10\lambda x + 8\lambda y, 2y + 8\lambda x + 10\lambda y),$$

os possíveis pontos de extremo deverão satisfazer

$$\begin{cases} 2x + 10\lambda x + 8\lambda y = 0 \\ 2y + 8\lambda x + 10\lambda y = 0 \\ 5x^2 + 8xy + 5y^2 = 9 \end{cases}$$

Claramente nem $(0,0)$ não é uma possível solução, uma vez que não é um ponto da elipse; portanto a única forma de podermos ter

$$\begin{bmatrix} 1+5\lambda & 4 \\ 4 & 1+5\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

é ser

$$\det \begin{bmatrix} 1+5\lambda & 4 \\ 4 & 1+5\lambda \end{bmatrix} = 0 \Leftrightarrow (1+5\lambda)^2 - 16 = 0 \Leftrightarrow 1 + 5\lambda = \pm 4.$$

Portanto obtemos $x = \pm y$, e substituindo na equação da elipse vem

$$10x^2 \pm 8x^2 = 9 \Leftrightarrow x^2 = \frac{1}{2} \text{ ou } x^2 = \frac{9}{2}$$

correspondendo às distâncias à origem

$$\left(x^2 + y^2\right)^{\frac{1}{2}} = \left(2x^2\right)^{\frac{1}{2}} = 1 \text{ ou } 3.$$

Como a elipse é compacta e f contínua, f tem que possuir máximo e mínimo ao longo da elipse, e de acordo com o teorema acerca dos extremos condicionados tais pontos devem ser escolhidos de entre os pontos determinados acima. Como f só assume dois valores nesses pontos, um tem que ser o máximo e o outro o mínimo. Portanto os comprimentos dos semieixos da elipse são 1 e 3.

7. Calcule o máximo e o mínimo da função $f(x,y,z) = x - 2y + 2z$ na região $x^2 + y^2 + z^2 \leq 9$.

Resolução: Uma vez que a bola fechada $x^2 + y^2 + z^2 \leq 9$ é compacta e f é contínua, f possui máximo e mínimo nesta região. Uma vez que

$$\nabla f(x,y,z) = (1, -2, 2) \neq \mathbf{0},$$

vemos que f não possui qualquer extremo local na bola aberta $x^2 + y^2 + z^2 < 9$, pelo que o máximo e o mínimo terão que estar na fronteira $x^2 + y^2 + z^2 = 9$. De acordo com a regra dos multiplicadores de Lagrange, devemos procurar os pontos críticos da função

$$F(x,y,z) = x - 2y + 2z + \lambda(x^2 + y^2 + z^2 - 9).$$

Uma vez que

$$\nabla F = (1 + 2\lambda x, -2 + 2\lambda y, 2 + 2\lambda z),$$

os possíveis pontos de mínimo deverão satisfazer

$$\begin{cases} 1+2\lambda x=0 \\ -2+2\lambda y=0 \\ 2+2\lambda z=0 \\ x^2+y^2+z^2=9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-\frac{1}{2\lambda} \\ y=\frac{1}{\lambda} \\ z=-\frac{1}{\lambda} \\ \frac{9}{4\lambda^2}=9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\mp 1 \\ y=\pm 2 \\ z=\mp 2 \\ \lambda=\pm\frac{1}{2} \end{cases}$$

Portanto o máximo e o mínimo serão necessariamente os pontos $(1,-2,2)$ e $(-1,2,-2)$. (Isto aliás poderia ver-se imediatamente observando que a função f é simplesmente o produto interno com o vector fixo $(1,-2,2)$).