

# Variedades e Extremos Condicionados

19 de Maio de 2009

1. Mostre que os seguintes conjuntos são variedades e indique a respectiva dimensão:

- (a)  $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 - z^2 = 1\}$ ;
- (b)  $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = x + y + z = 1\}$ ;
- (c)  $\{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : z = e^{x^2+y^2}, w = \cos(xy)\}$ .

2. Calcule o espaço tangente e o espaço normal a cada uma das variedades seguintes nos pontos indicados:

- (a)  $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 - z^2 = 1\}$ , em  $(1, 0, 0)$ ;
- (b)  $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = x + y + z = 1\}$ , em  $(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 1 - \sqrt{2})$ ;
- (c)  $\{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : z = e^{x^2+y^2}, w = \cos(xy)\}$ , em  $(0, 0, 1, 1)$ .

3. Escreva a equação do plano ortogonal à curva

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 - z^2 = 1, 3x + 4y - 5z = 0\}$$

no ponto  $(\frac{4}{5}, -\frac{3}{5}, 0)$ .

4. Escreva 4 como uma soma de 4 números reais positivos cujo produto seja máximo.

5. Que dimensões deverá ter uma caixa rectangular de volume  $V$ , aberta numa das faces, por forma a que a área da sua superfície seja mínima?

6. Determine o comprimento dos semieixos da elipse de equação  $5x^2 + 8xy + 5y^2 = 9$  (**Sugestão:** Recorde que os eixos de uma elipse se intersectam nos pontos em que a distância ao centro é máxima/mínima).

7. Calcule o máximo e o mínimo da função  $f(x, y, z) = x - 2y + 2z$  na região  $x^2 + y^2 + z^2 \leq 9$ .