Análise Matemática IV

Problemas para as Aulas Práticas

Cursos: **Todos**

2º semestre de 2000/01

Estes problemas destinam-se à avaliação contínua dos alunos. Note-se que os problemas propostos para cada semana estão programados para um investimento de tempo entre as *quatro* e as *seis horas*, nas quais se incluem as duas horas da aula prática.

Isto significa, em particular, que *é errado pensar que o trabalho desenvolvido nas aulas práticas é suficiente para resolver os problemas propostos*. Este método de funcionamento pressupõe o trabalho, individual ou em grupo, dos estudantes fora das aulas — entre duas e quatro horas semanais.

A experiência mostra que o processo mais eficiente para os próprios estudantes é o de comparecer na aula prática tendo já trabalhado em todos os problemas propostos para essa semana e resolvido pelo menos parte deles.

Semana 1

1. Escreva os seguintes números complexos sob a forma $a + bi$:

   a) $(5 + i6) + (2 - 3i)$.
   b) $(5 + i6)(2 - 3i)$.
   c) $(2 + i3)^3$.
   d) $(2 - i3)^{-1}$.
   e) $\dfrac{3 + 4i}{2 + i3}$.
   f) i^n , com $n \in \mathbb{Z}$.

2. Verifique as seguintes identidades:

   a) $\overline{(\overline{z})} = z$.
   b) $\overline{(wz)} = \overline{w}\,\overline{z}$.
   c) $|\overline{z}| = |z|$.

3. Mostre que

   a) $|\mathrm{Im}(z)| \leqslant |z| \leqslant |\mathrm{Re}(z)| + |\mathrm{Im}(z)|$.
   b) $|wz| = |w|\,|z|$.
   c) $|w + z| \leqslant |w| + |z|$.
   d) $||w| - |z|| \leqslant |w + z|$.

4. Esboce os seguintes conjuntos no plano complexo:

   a) $\{z \in \mathbb{C} : |z - 1| = 3\}$.
   b) $\{z \in \mathbb{C} : z = 1 + 3\cos\theta + i3\sin\theta, \quad 0 \leqslant \theta < 2\pi\}$.
   c) $\{z \in \mathbb{C} : |z + 2i| \leqslant 2\}$.
   e) $\{z \in \mathbb{C} : z = -i + (2 + i)t, \quad t \in \mathbb{R}\}$.
   f) $\{z \in \mathbb{C} : |z + i| + |z - i| = 4\}$.
   g) $\{z \in \mathbb{C} : 2|z| \leqslant |z - i|\}$.

5. Escreva os seguintes números complexos sob a forma polar:

   a) $\sqrt{2}$.
   b) -2.
   c) $3 + i\sqrt{3}$.
   e) $\left(3 + i\sqrt{3}\right)^n, \; n \in \mathbb{N}$.

6. Seja $z = \rho e^{i\theta}$, com $\rho \in \mathbb{R}^+$ e $\theta \in \mathbb{R}$. Escreva em termos de ρ e θ as seguintes expressões: $\overline{z}$; $|z|$; $-z$; z^3; $\mathrm{Re}(z)$; $\mathrm{Im}(z)$.

7. Calcule todas as soluções das equações

   a) $(1+z)^3 = 1$.
   b) $1 + 3z + 3z^2 + z^3 = i$.
   c) $e^z = -1$.
   e) $|e^{i\theta} - 1| = 2$, $\theta \in \mathbb{R}$(interprete geometricamente).

8. Utilizando as fórmulas de Euler, determine expressões para $\cos(3\phi)$ e $\sin(3\phi)$ em termos de $\cos(\phi)$ e $\sin(\phi)$.

9. Determine as partes real e imaginária das seguintes funções de variável complexa, e indique o conjunto de pontos do plano complexo onde são contínuas:

   a) z; b) z^2; c) $\bar{z}$; d) $z\bar{z}$;
   e) $\dfrac{1}{2z+3i}$; f) $z+\bar{z}$; g) $z-\bar{z}$; h) $z\,|z|$.

10. Mostre que a função de variável complexa definida por $f(x+iy) = x - 2y + i(2x+y)$ é diferenciável no sentido complexo em todo o $\mathbb{C}$, e escreva-a como função da variável complexa z.

Semana 2

11. Determine as partes real e imaginária das seguintes funções de variável complexa, e indique o conjunto dos pontos do plano complexo onde não possuem derivada:

    a) $x^2 - y^2 + i2xy$; b) $x^2 - y + i(x - y^2)$; c) $x^2y + x + i(x - y^2)$;
    d) $z\left(e^{iz} - e^{-iz}\right)$; e) $ze^{\bar{z}}$; f) $\left(e^{iz} + e^{-iz}\right)$;
    g) $e^{(z-\bar{z})}$; h) $\dfrac{z+2}{z+i}$; i) $\dfrac{1}{z} - \bar{z}$

12. Considere a função $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definida por $f(z) = (|z|^2 - 2)\bar{z}$.

    (a) Indique o conjunto de pontos do plano complexo onde f é diferenciável no sentido complexo, bem como o seu domínio de analiticidade.

    (b) Mostre que f aplica circunferências centradas na origem e de raio r em circunferências centradas na origem de raio r'. Para que valores de r se tem $r = r'$?

13. Mostre que $f(z) = \sqrt{|xy|}$ possui, na origem, derivadas parciais que verificam as equações de Cauchy-Riemann, mas que f não possui derivada nesse ponto.

14. Seja f uma função analítica que verifica, num aberto conexo D , $f'(z) = 0$ para todo o $z \in D$. Mostre que f é constante em D (sug.: deve mostrar que tanto a parte real como a parte imaginária de f são constantes enquanto funções das variáveis x, y).

15. Estabeleça as seguintes identidades (onde $z = x + iy$):

    a) $\cos(iz) = \cosh(z)$; b) $\sin(iz) = i \sinh z$;
    c) $|\cos z|^2 + |\sin z|^2 = \cosh^2 y + \sinh^2 y$; d) $\cos^2 z + \sin^2 z = 1$;
    e) $\sin(z+w) = \sin z \cos w + \cos z \sin w$; f) $\sin z = \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y$.

16. Utilize as Equações de Cauchy-Riemann na forma polar para verificar que a seguinte função é analítica em todo o seu domínio.

$$h(z) = 2\log\frac{\rho}{2} + i2\theta\ ,$$

com $z = \rho e^{i\theta}$, $\rho > 0$ e $0 < \theta < 2\pi$. Calcule $h'(z)$.

17. Calcule o valor principal (i.e., tomando na função $\log z$ o ângulo correspondente à restrição principal) de:

a) $\log(-1)$; b) i^i; c) $(1+i)^{1-i}$; d) 2^i.

18. Determine todas as soluções das seguintes equações:

a) $\cos z = 2$; b) $z^{2i} - 2z^i + 2 = 0$.

19. Estabeleça a seguinte fórmula:

$$\arctan z = \frac{i}{2}\log\frac{i+z}{i-z}.$$

Sug: Use as fórmulas de Euler na relação $\tan w = z$ para determinar e^w em função de z.

20. Calcule, para as curvas Γ e funções f indicadas, os integrais $\int_\Gamma f(z)dz$:

a) $f(z) = e^z$, Γ é o segmento de recta entre $z = i$ e $z = 1$, com esta orientação .

b) $f(z) = e^z$, Γ é constituído pelos segmentos dos eixos coordenados entre os pontos anteriores com a mesma orientação .

c) $f(z) = \dfrac{\overline{z}-1}{z}$, Γ é o semicírculo $z = re^{i\theta}$, $r > 0$, $0 \leqslant \theta \leqslant \pi/2$, percorrido no sentido convencional (anti-horário).

$\boxed{\text{Semana 3}}$

21. Justifique que a função $f(z) = \sin z\ e^{\cos z}$ é analítica e calcule os integrais $\int_\Gamma f(z)dz$ para as curvas Γ indicadas no exercício anterior.

22. Calcule os seguintes integrais (as curvas supõem-se percorridas no sentido convencional):

a) $\displaystyle\oint_\Gamma \frac{\cos z}{z(z-i)}\,dz$, onde Γ é a elipse $3x^2 + 2y^2 = 1$.

b) $\displaystyle\oint_\Gamma \frac{e^{iz}}{z+\pi/2}\,dz$, onde Γ é a curva $|z| = \pi$.

c) $\displaystyle\oint_\Gamma e^{\cos^2 z}\,dz$, onde Γ é a curva $|z| = 1$.

d) $\displaystyle\oint_{|z|=2} \frac{\sin z}{(z-i)^{10}}dz$.

23.

a) Seja f uma função inteira e limitada. Mostre que então f é constante. (Sug.: Utilize as fórmulas integrais de Cauchy).

b) Mostre que se existem $M > 0$ e um inteiro n tal que $|f(z)| \leq M|z|^n$ para $|z| > |z_0|$, então f é um polinómio de grau $\leq n$.

Obs.: Este último facto mostra que uma função inteira não polinomial tem de crescer, em módulo, mais rapidamente do que qualquer polinómio. Como se justifica esta afirmação, por exemplo, no caso da função inteira $f(z) = \cos z$?

24. Determine a função harmónica conjugada v para as seguintes funções u:

a) $u = x^2 + xy - y^2$; b) $u = \dfrac{x}{x^2 + y^2}$; c) $u = e^{-y}(x \cos x - y \sin x)$.

25. Poderá existir uma função analítica cuja parte real seja $u(x, y) = e^{-y}x + e^{x}y$?

26. Considere a função $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definida por $g(z) = z(z^2 + \overline{z}^2 - |z|^2)$, e sejam u e v funções de $\mathbb{R}^2$ em $\mathbb{R}$ tais que $u(x, y) = \mathrm{Re}(g(x + iy))$ e $v(x, y) = \mathrm{Im}(g(x + iy))$.

a) Determine o conjunto dos pontos onde u e v satisfazem as equações de Cauchy–Riemann. O que pode concluir sobre a analiticidade da função g?

b) Mostre que u é uma função harmónica.

c) Determine uma função $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, analítica em $\mathbb{C}$, tal que $Ref = u$.

27. Para que valores de z é a série $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{z}\right)^n$ convergente?

28. Calcule os raios de convergência das seguintes séries de potências:

a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(z - \sqrt{2}i\right)^n}{n^p}$, $p \in \mathbb{Z}$; b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z + 1)^n}{(n!)^2}$;

c) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (\alpha z)^n$, $\alpha \in \mathbb{C}$; d) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} n^n z^{n^2}$.

29. Se a série $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ tem raio de convergência R, qual o raio de convergência de $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{2n}$? E de $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n^2 z^n$?

30. Considere a seguinte série de potências

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\, z^n \qquad \text{onde} \qquad a_n = \begin{cases} 2^n & \text{se} \quad n \text{ par} \\ 3^n & \text{se} \quad n \text{ impar} \end{cases} .$$

Determine o seu raio de convergência.

Sabendo que esta é a série de MacLaurin de uma função f, analítica em todo o seu domínio (aberto e conexo), calcule $f(1)$.

Semana 4

31. Integre a série de MacLaurin de $f(s) = 1/(1+s^2)$ sobre uma curva interior ao círculo de convergência, desde $s = 0$ até $s = z$, de modo a obter a representação [1]

$$\arctan z = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{z^{2k+1}}{2k+1}. \qquad (|z| < 1).$$

32. Mostre que a função [1]

$$f(z) = \begin{cases} \dfrac{\arctan z}{z} & \text{se } z \neq 0 \\ 1 & \text{se } z = 0 \end{cases}$$

é analítica no domínio $|z| < 1$. Qual a sua série de MacLaurin? (Sug.: compare com o problema anterior.)

33. Considere a função $f(z) = \dfrac{e^z}{\sin^2 z}$. *Sem calcular os respectivos coeficientes*, indique justificadamente qual o raio de convergência do desenvolvimento de f em série de potências de $z - 2$.

34. Determine a série de Laurent de $\dfrac{1}{(z^2-1)^2}$ nas seguintes regiões:

   a) $0 < |z-1| < 2$.

   b) $2 < |z-1|$.

   e aproveite os resultados para calcular os seguintes integrais:

$$\text{a)} \oint_{|z-1|=1} \frac{1}{(z^2-1)^2}\, dz \ ; \quad \text{b)} \oint_{|z-1|=3} \frac{1}{(z^2-1)^2}\, dz \ .$$

35. Determine todos os valores possíveis do integral $\displaystyle\oint_\Gamma \frac{z \cos z}{z^2 + a^2} dz$, onde Γ é uma curva de Jordan seccionalmente regular contida no domínio de f e $a \in \mathbb{R}$.

   Observação : Note que deve incluir ambos os sentidos de percurso de Γ.

[1] Considere um ramo tal que $\arctan 0 = 0$.

36. Seja f uma função analítica no ponto z_0. Mostre que a função $g(z) = f(z)/(z - z_0)$ possui em z_0 uma singularidade removível caso $f(z_0) = 0$, e um pólo simples de resíduo $f(z_0)$ caso contrário.

37. Suponha que $f(z) = h(z)/g(z)$ tem um pólo de ordem 1 em $z = z_0$, sendo h e g analíticas em z_0 e $h(z_0) \neq 0$. Mostre que

$$\mathrm{Res}_1 f\,(z) = h(z_0)/g'(z_0). \tag{1}$$

38. Classifique as singularidades das seguintes funções e determine os respectivos resíduos:

a) $\dfrac{1}{i+z}$ b) $\dfrac{1}{(z^2+2)^2}$ c) $\dfrac{z^2+1}{1-z^4}$ d) $\dfrac{z-\sin z}{z^5}$

e) $\dfrac{1-\cos z}{z\sin z}$ i) $z^4 \sin\frac{1}{z}$ f) $\dfrac{z-\pi/2}{\cos z}$ g) $\dfrac{1}{e^z - 2i}$

39. Utilize o Teorema dos Resíduos para calcular

a) $\displaystyle\oint_{|z+1+i|=2} \frac{\sin z}{(z^2-1)}\,dz\ .$

b) $\displaystyle\oint_{|z|=4} \frac{\sin z}{z^2\,(\pi - z)}\,dz\ .$

c) $\displaystyle\oint_{|z|=1} \frac{e^z - 1}{z^3}\,dz\ .$

40. Estabeleça, através do Teorema dos Resíduos e mediante a escolha de um contorno de integração adequado, os seguintes resultados:

a) $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\cos(\theta)}{\sqrt{2}+\cos(\theta)}d\theta = -\frac{\pi}{\sqrt{2}+1}.$

b) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2+\sin^2\theta} = \pi\sqrt{\frac{2}{3}}.$

c) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^4+1} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$. Sugestão: utilize a relação (1) do problema 37.

d) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+1)(x^2+4)} = \frac{1}{12}\pi.$

e) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\cos x\ dx}{x^2+1} = \frac{\pi}{2e}.$

f) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\sin x}{(x^2+1)}\ dx = \frac{\pi}{e}.$