Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

ANÁLISE MATEMÁTICA IV

FICHA AVANÇADA 3 – EQUAÇÕES DIFERENCIAIS LINEARES

(estes exercícios destinam-se a quem já domina bem os exercícios das fichas normais)

(1) Seja $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ uma solução não identicamente nula da equação

$$\begin{bmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} .$$

Sem resolver a equação, mostre que $||y||^2$ é estritamente crescente.

(2) Seja V um subespaço vectorial (complexo) de dimensão finita do espaço de todas as funções infinitamente diferenciáveis de $\mathbb{R}$ para $\mathbb{C}$. Prove que, se V for fechado para a derivação, i.e.,

$$f(t) \in V \quad \Longrightarrow \quad \frac{df}{dt} \in V \ ,$$

então V é fechado para as translações, i.e.,

$$f(t) \in V \ \text{ e } \ a \in \mathbb{R} \quad \Longrightarrow \quad f(t+a) \in V \ .$$

(3) Seja $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma solução não identicamente nula da equação $y^{(3)} = y$ com a propriedade $\lim_{t\to+\infty} y(t) = 0$. Determine constantes reais a, b e c tais que

$$y^{(2)} + a\dot{y} + by + c = 0 \ .$$

(4) Suponha que as funções $\sin t$ e $\sin 2t$ são ambas soluções da equação diferencial

$$\sum_{k=0}^{n} c_k \frac{d^k y}{dt^k} = 0 \ ,$$

onde $c_0, \dots, c_n$ são constantes reais não todas nulas. Qual é a menor ordem possível para a equação? Porquê? Escreva uma equação de ordem mínima tendo as funções dadas como soluções.

Seria a resposta à pergunta acima diferente se as constantes $c_0, \dots, c_n$ pudessem ser complexas?

(5) Seja k um inteiro positivo. Para que valores de $c \in \mathbb{R}$ é que a equação

$$\frac{d^2y}{dt^2} - 2c\frac{dy}{dt} + y = 0$$

admite uma solução satisfazendo $y(0) = y(2k\pi) = 0$ que não seja identicamente nula?