Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

ANÁLISE MATEMÁTICA IV

FICHA AVANÇADA 1 – ANÁLISE COMPLEXA

(estes exercícios destinam-se a quem já domina bem os exercícios das fichas normais)

(1) Sejam a, b, c três pontos na circunferência de raio 1 do plano complexo satisfazendo $a + b + c = 0$. Prove que a, b, c são os vértices de um triângulo equilátero.

(2) Demonstre que a função $f(z)$ é diferenciável em z_0 se e só se a função $\overline{f(\overline{z})}$ é diferenciável em $\overline{z_0}$.

(3) Esboce o conjunto dos logaritmos de $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z = 1\}$.

(4) Mostre que, para $|z| < 1$, se tem

$$\begin{array}{l}(1 + z + z^2 + \ldots + z^9) \cdot \\ (1 + z^{10} + z^{20} + \ldots + z^{90}) \cdot \\ (1 + z^{100} + z^{200} + \ldots + z^{900}) \cdots = \frac{1}{1-z} \ .\end{array}$$

(5) Sejam a e b números complexos cujas partes reais são negativas ou 0. Demonstre a desigualdade $|e^a - e^b| \leq |a - b|$.

(6) Mostre que existe uma função complexa analítica definida em $\{z \in \mathbb{C} : |z| > 2\}$ cuja derivada é

$$\frac{1}{(z-1)(z-2)} \ .$$

(7) Considere a sequência de números $a_0, a_1, a_2, \ldots$ definida pela equação

$$1 - x^2 + x^4 - x^6 + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-3)^n \ , \qquad 0 < x < 1 \ .$$

Calcule

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \ .$$

(8) Sejam P e Q polinómios complexos com o grau de Q pelo menos dois mais do que o grau de P. Mostre que existe um raio $R > 0$ para o qual

$$\oint_\gamma \frac{P(z)}{Q(z)}\, dz = 0 \ ,$$

qualquer que seja a curva fechada simples γ fora do disco $|z| \leq R$.