Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

ANÁLISE MATEMÁTICA IV

FICHA 4 – EQUAÇÕES DIFERENCIAIS DE PRIMEIRA ORDEM ESCALARES E FORMAS CANÓNICAS DE JORDAN

(1) Determine a solução do seguinte problema de valor inicial:

$$\dot{y} = \frac{te^t + t}{2 + \sin y} \quad , \quad y(0) = \frac{\pi}{2}$$

Resolução: *Uma vez que $2 + \sin y$ nunca se anula a equação é equivalente à equação separável*

$$(2 + \sin y)\dot{y} = te^t + t$$

Integrando de 0 a t obtém-se

$$2y - \cos y - 2y(0) + \cos y(0) = te^t - e^t + \frac{1}{2}t^2 - (0 - 1 + 0)$$

ou seja

$$2y - \cos y - te^t + e^t - \frac{1}{2}t^2 = \pi + 1$$

Uma vez que $2 + \sin y(0) = 2 + \sin\frac{\pi}{2} = 3 \neq 0$, o teorema da função implícita garante que esta equação define implicitamente y em função de t numa vizinhança de $t_0 = 0$. $\square$

(2) Determine a solução do seguinte problema de valor inicial:

$$(te^{ty} - 2y)\dot{y} = -ye^{ty} - 1 \quad , \quad y(0) = 1$$

Resolução: *A equação pode escrever-se na forma*

$$M(t, y) + N(t, y)\dot{y} = 0$$

onde $M(t, y) = ye^{ty} + 1$ e $N(t, y) = te^{ty} - 2y$. Tem-se

$$\frac{\partial M}{\partial y} = e^{ty} + tye^{ty} = \frac{\partial N}{\partial t}$$

portanto a equação diferencial é exacta. Um potencial $\phi(t, y)$ para (M, N) é uma solução do sistema

$$\begin{cases} \frac{\partial \phi}{\partial t} = ye^{ty} + 1 \\ \frac{\partial \phi}{\partial y} = te^{ty} - 2y \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} \phi(t, y) = e^{ty} + t + A(y) \\ \phi(t, y) = e^{ty} - y^2 + B(t) \end{cases}$$

Uma solução é $\phi(t, y) = e^{ty} + t - y^2$. Conclui-se que a solução do problema de valor inicial verifica a equação

$$e^{ty} + t - y^2 = \phi(0, 1) = 0$$

Uma vez que

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(e^{ty} + t - y^2\right)\Big|_{(t,y)=(0,1)} = \left(te^{ty} - 2y\right)\big|_{(t,y)=(0,1)} = -2 \neq 0$$

o teorema da função implícita garante que esta equação define implicitamente y como uma função de t numa vizinhança de $t_0 = 0$. $\square$

(3) Determine a solução do seguinte problema de valor inicial:

$$\arctan y + e^{t^2} + \frac{t\dot{y}}{2+2y^2} = 0 \quad , \quad y(1) = 0$$

Resolução: *Sejam* $M(t,y) = \arctan y + e^{t^2}$ *e* $N(t,y) = \frac{t}{2+2y^2}$. *Tem-se*

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{1}{1+y^2} \neq \frac{1}{2+2y^2} = \frac{\partial N}{\partial t}$$

logo a equação não é exacta.

Para que exista um factor de integração $\mu = \mu(t)$ *é necessário que a seguinte equação tenha solução:*

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial y}\left(\mu(t)(\arctan y + e^{t^2})\right) &= \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{t\mu(t)}{2+2y^2}\right) \\
\mu(t)\frac{1}{1+y^2} &= \mu(t)\frac{1}{2+2y^2} + \mu'(t)\frac{t}{2+2y^2} \\
\mu'(t)\frac{t}{2+2y^2} &= \mu(t)\frac{1}{2+2y^2} \\
\mu'(t)t &= \mu(t)
\end{aligned}$$

Assim pode-se tomar $\mu(t) = t$ *para factor de integração quando* $t \neq 0$. *Multiplicando a equação por* t *obtém-se a seguinte equação exacta, que é equivalente à inicial para* $t \neq 0$:

$$t\arctan y + te^{t^2} + \frac{t^2}{2+2y^2}\,\dot{y} = 0$$

Um potencial para esta equação é uma solução do sistema

$$\begin{cases} \frac{\partial \phi}{\partial t} = t\arctan y + te^{t^2} \\ \frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{t^2}{2+2y^2} \end{cases} \iff \begin{cases} \phi(t,y) = \frac{t^2}{2}\arctan y + \frac{1}{2}e^{t^2} + A(y) \\ \phi(t,y) = \frac{t^2}{2}\arctan y + B(t) \end{cases}$$

Assim uma solução é dada por

$$\phi(t,y) = \frac{t^2}{2}\arctan y + \frac{1}{2}e^{t^2}$$

Como $\phi(1,0) = \frac{1}{2}e$, *a solução do problema de valor inicial verifica*

$$\begin{aligned}
& \frac{t^2}{2}\arctan y + \frac{1}{2}e^{t^2} = \frac{1}{2}e \\
\iff \quad & \arctan y = \frac{e - e^{t^2}}{t^2} \\
\iff \quad & y(t) = \tan\left(\frac{e - e^{t^2}}{t^2}\right)
\end{aligned}$$

O intervalo de definição é o maior subintervalo do conjunto

$$D = \{t \in \mathbb{R} \setminus \{0\} : -\frac{\pi}{2} < \frac{e - e^{t^2}}{t^2} < \frac{\pi}{2}\}$$

que contém $t = 1$. *Este intervalo não se consegue achar explicitamente uma vez que não se consegue resolver analiticamente as equações*

$$\frac{e - e^{t^2}}{t^2} = \pm\frac{\pi}{2}$$

$\square$

(4) Determine a solução geral da seguinte equação diferencial:

$$\dot{y} - 2e^{-y} = 2te^{-y}$$

Resolução: *Esta equação é separável:*

$$\begin{aligned} \dot{y} - 2e^{-y} &= 2te^{-y} \\ e^{y}\dot{y} &= 2t+2 \\ e^{y} &= t^2+2t+C \qquad \text{com } C\in\mathbb{R} \\ y(t) &= \ln(t^2+2t+C) \qquad \text{com } C\in\mathbb{R} \end{aligned}$$

O intervalo de definição de uma solução é um intervalo maximal contido em

$$\{t\in\mathbb{R} : t^2+2t+C>0\}$$

Uma vez que

$$t^2+2t+C=0 \iff t=\frac{-2\pm\sqrt{4-4C}}{2} \iff t=-1\pm\sqrt{1-C}$$

conclui-se que para que uma solução tenha domínio não vazio, tem que ser $C\le 1$ e nesse caso, os intervalos máximos de definição das soluções são

$$]-\infty,-1-\sqrt{1-C}[\quad \text{ou} \quad]-1+\sqrt{1-C},+\infty[$$

□

(5) Mostre que o problema de valor inicial

$$\dot{y} = y^{\frac{1}{3}} \quad , \quad y(0)=0$$

tem infinitas soluções. Porque é que isto não contradiz o teorema de Picard?

Resolução: *Começamos por observar que o problema de valor inicial tem a solução constante $y(t)=0$. Para $y\neq 0$ a equação é equivalente a*

$$\begin{aligned} & y^{-\frac{1}{3}}\dot{y}=1 \\ \iff\quad & \frac{3}{2}\left(y^{\frac{2}{3}}-y_0^{\frac{2}{3}}\right)=t-t_0 \\ \iff\quad & y^{\frac{2}{3}}=\frac{2}{3}(t-t_0)+y_0^{\frac{2}{3}} \\ \iff\quad & y(t)^2=\left(\frac{2}{3}(t-t_0)+y_0^{\frac{2}{3}}\right)^3 \\ \iff\quad & y(t)=\pm\sqrt{\left(\frac{2}{3}(t-t_0)+y_0^{\frac{2}{3}}\right)^3} \quad \text{para } \frac{2}{3}(t-t_0)+y_0^{\frac{2}{3}}\ge 0 \\ \iff\quad & y(t)=\pm\sqrt{\left(\frac{2}{3}(t-t_0)+y_0^{\frac{2}{3}}\right)^3} \quad \text{para } t\ge t_0-\frac{3}{2}y_0^{\frac{2}{3}} \end{aligned}$$

Uma vez que

$$\frac{d}{dt}\left(\pm\left(\frac{2}{3}(t-t_0)+y_0^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}\right)=\pm\sqrt{\frac{2}{3}(t-t_0)+y_0^{\frac{2}{3}}}$$

tem-se

$$\lim_{t \to t_0 - \frac{3}{2} y_0^{\frac{2}{3}}} \frac{dy}{dt}(t) = 0$$

e portanto estas soluções podem prolongar-se ao instante $t = t_0 - \frac{3}{2} y_0^{\frac{2}{3}}$ *como funções de classe* C^1. *Em particular, para* $y_0 = 0$ *tem-se "soluções" (as aspas referem-se ao facto de não estarem definidas num intervalo aberto)*

$$y(t) = \pm \sqrt{\left(\frac{2}{3}(t - t_0)\right)^3} \qquad \textit{para } t \geq t_0$$

que se podem "colar" à solução constante igual a 0 *para obter soluções da equação definidas para* $t \in \mathbb{R}$:

$$y(t) = \begin{cases} \pm \sqrt{\left(\frac{2}{3}(t - t_0)\right)^3} & \textit{para } t \geq t_0 \\ 0 & \textit{se } t < t_0 \end{cases}$$

Se $t_0 \geq 0$ *estas funções são soluções do problema de valor inicial do enunciado*[1]. *Conclui-se que o problema de valor inicial tem infinitas soluções.*

Isto não contradiz o teorema de Picard porque a função $f(t, y) = y^{\frac{1}{3}}$ *não é localmente Lipschitziana em nenhuma vizinhança* U *de um ponto* $(t_0, 0)$. *Se* f *fosse localmente Lipschitziana existiria* C *tal que*

$$\frac{|f(t, y) - f(t, 0)|}{|y - 0|} \leq C \quad \textit{para } (t, y) \in U$$

Mas em qualquer tal vizinhança

$$\sup \frac{\left|y^{\frac{1}{3}} - 0\right|}{|y - 0|} = \sup \left|y^{-\frac{2}{3}}\right| = +\infty$$

□

(6) Esboce o campo de direcções e trace os respectivos tipos de solução para as seguintes equações diferenciais:
(a) $\dot{y} = \sin y$
(b) $\dot{y} = \frac{y + 2t}{y - 3t}$

Sugestão: Na alínea b), comece por achar as soluções da equação da forma $y(t) = ct$ onde c é um número real.

Resolução:
(a) *Para cada* $c \in \mathbb{R}$, *o conjunto dos pontos* $(t, y) \in \mathbb{R}^2$ *onde o gráfico da solução* $y(t)$ *tem declive* $\frac{dy}{dt} = c$, *é determinado pela equação*

$$\sin y = c \; .$$

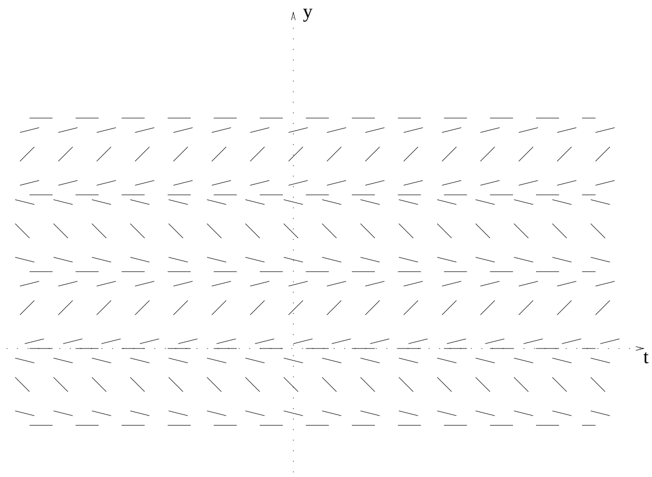
[1] Não é difícil provar que estas são *todas* as soluções.

Portanto os declives possíveis têm que estar no intervalo $[-1, 1]$ *e o campo de direcções é invariante mediante translações de* 2π *na direcção do eixo dos* yy.

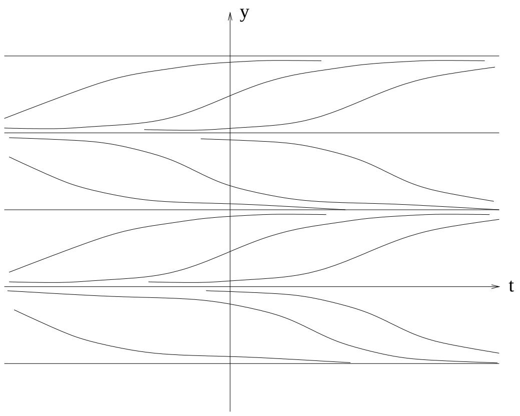
Casos especiais:

$c = -1$	$\sin y = -1 \iff y = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$
$c = -\frac{1}{2}$	$\sin y = -\frac{1}{2} \iff y = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi$ *ou* $y = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi$
$c = \frac{1}{2}$	$y = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ *ou* $y = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$
$c = 0$	$y = k\pi$
$c = 1$	$y = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$

Esboço do campo de direcções:



Traçado dos tipos de solução:



(b) *Para cada* $c \in \mathbb{R}$, *o conjunto dos pontos* $(t, y) \in \mathbb{R}^2$ *onde o gráfico da solução* $y(t)$ *tem declive* $\frac{dy}{dt} = c$, *é determinado pela equação*

$$\frac{y + 2t}{y - 3t} = c \ .$$

e a equação não está definida para $y = 3t$. *Note-se no entanto que quando uma solução da equação tende para um ponto sobre esta recta o declive do seu gráfico tende para infinito. Podemos portanto pensar nestes pontos como aqueles em que a* *recta tangente às soluções é vertical. Em geral, tem-se*

$$\begin{aligned} & \frac{y+2t}{y-3t} = c \\ \iff \quad & y + 2t = cy - 3ct \\ \iff \quad & (1-c)y = -(3c+2)t \end{aligned}$$

Portanto os conjuntos de pontos onde o declive das soluções é constante igual a c *são rectas que passam pela origem.*

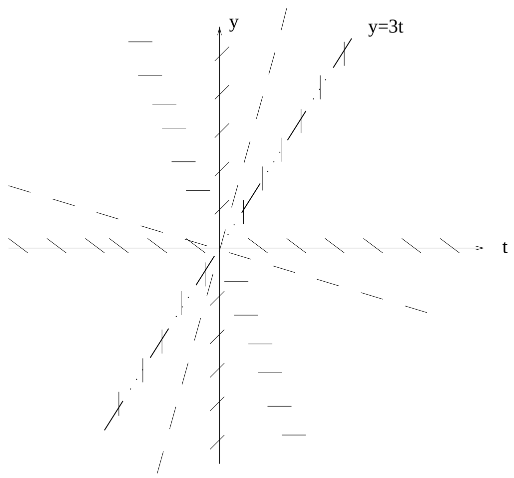
É natural ver se algumas destas rectas são soluções (cf. sugestão). Para $c \neq 3$, $y = ct$ *é uma solução da equação sse*

$$\begin{aligned} & \frac{ct+2t}{ct-3t} = c \\ \iff \quad & c + 2 = c^2 - 3c \\ \iff \quad & c^2 - 4c - 2 = 0 \\ \iff \quad & c = 2 \pm \sqrt{6} \end{aligned}$$

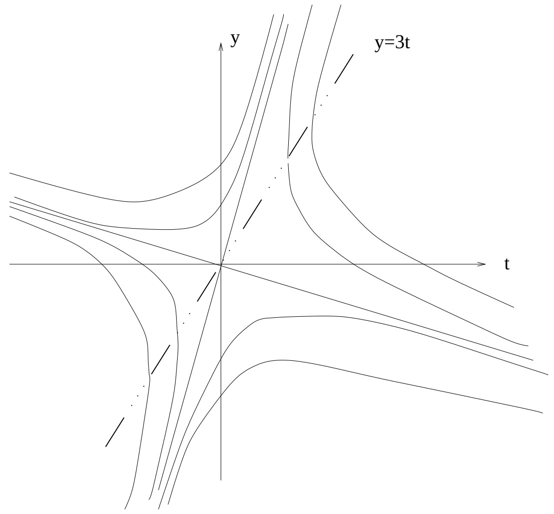
<u>*Casos especiais:*</u>

$$\begin{array}{ll} c = 1 & \qquad t = 0 \\ c = -\frac{2}{3} & \qquad y = 0 \\ c = 0 & \qquad y = -2t \end{array}$$

<u>*Esboço do campo de direcções:*</u>



Traçado dos tipos de solução:



□

(7) Para cada uma das seguintes matrizes A ache uma forma canónica de Jordan J e uma matriz de mudança de base S tal que $A = SJS^{-1}$.

(a) $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$

(b) $A = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{5}{2} \end{bmatrix}$

(c) $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$

(d) $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

(e) $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

Resolução:

(a) *Os valores próprios de* A *são*

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & 0 \\ -2 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0 \iff (3-\lambda)(2-\lambda) = 0 \iff \lambda = 3 \text{ ou } \lambda = 2$$

portanto a matriz é diagonalizável e tem-se

$$J = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Os vectores próprios para $\lambda = 2$ *são os que verificam*

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \iff a = 0$$

portanto uma base dos vectores próprios é constituída por

$$v_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Os vectores próprios para $\lambda = 3$ são os que verificam

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \iff b = -2a$$

portanto uma base dos vectores próprios é constituída por, por exemplo,

$$v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

A matriz de mudança de base é

$$S = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$$

(b) *Os valores próprios de A são*

$$\begin{aligned} & \begin{vmatrix} \frac{3}{2} - \lambda & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{5}{2} - \lambda \end{vmatrix} = 0 \\ \iff \quad & (\frac{3}{2} - \lambda)(\frac{5}{2} - \lambda) + \frac{1}{4} = 0 \\ \iff \quad & \lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0 \\ \iff \quad & (\lambda - 2)^2 = 0 \\ \iff \quad & \lambda = 2 \end{aligned}$$

Como não pode haver dois vectores próprios linearmente independentes (nesse caso o espaço próprio seria todo o $\mathbb{R}^2$ e portanto A teria de ser igual a $2I$ o que não é o caso) conclui-se que

$$J = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Um vector próprio associado a $\lambda = 2$ é uma solução da equação

$$\begin{aligned} & (A - 2I)v_1 = 0 \\ \iff \quad & \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ \iff \quad & a = b \end{aligned}$$

portanto uma base dos vectores próprios é constituída por, por exemplo,

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Um vector próprio generalizado associado ao vector próprio v_1 é uma solução da equação

$$\begin{aligned} & (A - 2I)v_2 = v_1 \\ \iff \quad & \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \\ \iff \quad & -\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b = 1 \end{aligned}$$

Pode-se tomar, por exemplo, $a = -1$ e $b = 1$, isto é

$$v_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Conclui-se que uma matriz de mudança de base S tal que $A = SJS^{-1}$ é

$$S = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

(c) *Os valores próprios de A são*

$$\begin{aligned} & \begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 \\ -2 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0 \\ \iff \quad & (3-\lambda)(2-\lambda)+2=0 \\ \iff \quad & \lambda^2 - 5\lambda + 8 = 0 \\ \iff \quad & \lambda = \frac{5 \pm \sqrt{-7}}{2} \end{aligned}$$

portanto a matriz é diagonalizável e tem-se

$$J = \begin{bmatrix} \frac{5+i\sqrt{7}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{5-i\sqrt{7}}{2} \end{bmatrix}$$

Os vectores próprios para $\lambda = \frac{5+i\sqrt{7}}{2}$ são os que verificam

$$\begin{bmatrix} \frac{1-i\sqrt{7}}{2} & 1 \\ -2 & -\frac{1+i\sqrt{7}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \iff b = \left(\frac{-1+i\sqrt{7}}{2} \right) a$$

portanto uma base dos vectores próprios para $\lambda = \frac{5+i\sqrt{7}}{2}$ é constituída por

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{-1+i\sqrt{7}}{2} \end{bmatrix}$$

Como A é uma matriz real, os vectores próprios para $\lambda = \frac{5-\sqrt{7}i}{2}$ são os conjugados dos vectores próprios para $\lambda = \frac{5+\sqrt{7}i}{2}$ portanto uma base dos vectores próprios é constituída por

$$v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{1+i\sqrt{7}}{2} \end{bmatrix}$$

A matriz de mudança de base é

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \frac{-1+i\sqrt{7}}{2} & -\frac{1+i\sqrt{7}}{2} \end{bmatrix}$$

(d) *Os valores próprios de A são as soluções de*

$$\begin{aligned} & \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = 0 \\ \iff \quad & -\lambda^3 - \lambda = 0 \\ \iff \quad & \lambda(\lambda^2+1) = 0 \\ \iff \quad & \lambda = 0 \text{ ou } \lambda = \pm i \end{aligned}$$

Portanto a matriz é diagonalizável e pode-se tomar

$$J = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & -i \end{bmatrix}$$

Claramente,

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

é um vector próprio de $\lambda = 0$. Os vectores próprios de $\lambda = i$ são os que verificam

$$
\begin{aligned}
& \begin{bmatrix} -i & 0 & 0 \\ 0 & -i & -1 \\ 0 & 1 & -i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\
\iff & \begin{cases} -ia = 0 \\ -ib - c = 0 \\ b - ic = 0 \end{cases} \\
\iff & a = 0 \text{ e } c = -ib
\end{aligned}
$$

portanto uma base dos vectores próprios para $\lambda = i$ é dada por

$$v_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -i \end{bmatrix}$$

Como A é uma matriz real os vectores próprios associados a $-i$ são os conjugados dos vectores próprios de $\lambda = i$. Uma base é dada por

$$v_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ i \end{bmatrix}$$

Portanto uma matriz de mudança de base é dada por

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -i & i \end{bmatrix}$$

(e) *Os valores próprios de A são as soluções de*

$$
\begin{aligned}
& \begin{vmatrix} -\lambda & -1 & 0 \\ -1 & -\lambda & -1 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = 0 \\
\iff & -\lambda^3 + \lambda - \lambda = 0 \\
\iff & \lambda = 0
\end{aligned}
$$

Os vectores próprios de $\lambda = 0$ são os que satisfazem a equação

$$
\begin{aligned}
& \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\
\iff & \begin{cases} b = 0 \\ -a - c = 0 \end{cases}
\end{aligned}
$$

A dimensão do espaço próprio de 0 é 1 portanto há um único bloco de Jordan. Assim

$$J = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Uma base dos vectores próprios associados a $\lambda = 0$ é

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

A segunda coluna da matriz S obtém-se resolvendo a equação

$$\begin{aligned}&(A-0I)v_2 = v_1\\ \Longleftrightarrow\quad & \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0\\ -1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix} a\\ b\\ c\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1\\ 0\\ -1\end{bmatrix}\end{aligned}$$

Pode-se tomar

$$v_2 = \begin{bmatrix} 0\\ -1\\ 0\end{bmatrix}$$

A terceira coluna da matriz S obtém-se resolvendo a equação

$$\begin{aligned}&(A-0I)v_3 = v_2\\ \Longleftrightarrow\quad & \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0\\ -1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix} a\\ b\\ c\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0\\ -1\\ 0\end{bmatrix}\end{aligned}$$

Pode-se tomar

$$v_3 = \begin{bmatrix} 1\\ 0\\ 0\end{bmatrix}$$

Portanto uma matriz de mudança de base é dada por

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1\\ 0 & -1 & 0\\ -1 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

$\square$