Análise Matemática IV
2º semestre de 2000/2001

Exercício-teste 4

Seja $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ dada por

$$f(z) = \bar{z} + cx \quad \text{para qualquer} \quad z = x + yi \in \mathbb{C},$$

e em que c é uma constante complexa. Sejam C_1 e C_2 duas curvas unindo os pontos $-i$ e i (com esta orientação), em que C_1 une $-i$ a i pelo segmento de recta e C_2 une $-i$ a i pela semicircunferencia de raio 1 que pertence ao semiplano $\operatorname{Re} z \geq 0$.

(a) Calcule $\int_{C_1} f(z)\, dz$ e $\int_{C_2} f(z)\, dz$.

(b) Indique o (único) valor de c para o qual o integral ao longo de qualquer curva simples unindo $-i$ a i (com esta orientação) nao depende da curva. Justifique convenientemente a resposta.

Resolução

(a) Uma parametrização conveniente de C_1 é $z = it$, com $-1 \leq t \leq 1$. Assim:

$$\int_{C_1} f(z)dz = \int_{-1}^{1} (-it)idt = \int_{-1}^{1} tdt = 0.$$

Quanto a C_2, tomamos $z = e^{it}$, com $-\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2}$. Desta forma:

$$\begin{aligned}
\int_{C_2} f(z)dz &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(e^{-it} + c\cos t\right) ie^{it}dt \\
&= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} idt + ci\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos t(\cos t + i\operatorname{sen} t)dt \\
&= i\pi + ci\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 tdt - c\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \operatorname{sen} t\cos tdt \\
&= i\pi + ci\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{1+\cos 2t}{2}dt - \frac{c}{2}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \operatorname{sen} 2tdt \\
&= i\pi + ci\left(\frac{t}{2} + \frac{\operatorname{sen} 2t}{4}\right)\Bigg|_{-\pi/2}^{\pi/2} - 0 \\
&= i\pi + ci\frac{\pi}{2} \;=\; \left(1 + \frac{c}{2}\right) i\pi
\end{aligned}$$

(b) Pelos resultados anteriores, teremos necessariamente que ter

$$\left(1+\frac{c}{2}\right) i\pi = 0,$$

ou seja $c=-2$. Mas isto mostra apenas que $c=-2$ é uma condição necessária para que o integral não dependa da curva. Porém, para $c=-2$,

$$f(z) = x - yi - 2x = -x - yi = -z,$$

Assim, f é uma função analítica em todo o plano complexo. Então, pelo teorema de Cauchy, $c=-2$ é também condição suficiente para que o integral não dependa da curva.