Análise Matemática IV
2º semestre de 2000/2001

Exercício-teste 1

Resolva a equação

$$z^3 - 2z^2 + 2z - 1 = 0$$

e apresente as três raizes na forma $re^{i\theta}$.

Resolução

Por inspecção da equação facilmente se conclui que $z = 1$ é uma solução. Consequentemente,

$$z^3 - 2z^2 + 2z - 1 = (z-1)p(z),$$

onde $p(z)$ é um polinómio do segundo grau. Para obter $p(z)$ podemos por exemplo usar a regra de Rufini:

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & -2 & 2 & -1 \\ 1 & & 1 & -1 & 1 \\ \hline & 1 & -1 & 1 & |0 \end{array}$$

Portanto $p(z) = z^2 - z + 1$. As duas raizes deste polinómio podem ser obtidas da fórmula resolvente:

$$p(z) = 0 \Leftrightarrow z = \frac{1 \pm \sqrt{1-4}}{2} \Leftrightarrow z = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2} i.$$

Logo as soluções da equação são os números complexos $1, \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$. Notando que $\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$, $\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$, é fácil ver que estas raizes se podem também escrever como $1 \cdot e^{i0}, 1 \cdot e^{i\frac{\pi}{3}}, 1 \cdot e^{-i\frac{\pi}{3}}$.