Análise Matemática IV
$2^{\underline{o}}$ semestre de 2000/2001

Exercício-teste 11

Resolva o seguinte problema de valor inicial:

$$\begin{cases} \ddot{y} + (\dot{y})^2 = \dot{y}e^y \\ y(0) = 0 \\ \dot{y}(0) = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Resolução

Pode reduzir-se a ordem desta equação fazendo a substituição

$$\dot{y} = V(y(t)).$$

Obtém-se assim

$$\ddot{y} = V'\dot{y} = V'V$$

e portanto a equação escreve-se

$$V'V + V^2 = Ve^y \Leftrightarrow V' + V = e^y.$$

Usando por exemplo o método dos coeficientes indeterminados facilmente se determina a solução geral desta equação:

$$V = \frac{1}{2}e^y + ke^{-y} \quad (k \in \mathbb{R}).$$

Das condições iniciais obtém-se

$$\dot{y}(0) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow V(y(0)) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow V(0) = \frac{1}{2}$$

e portanto $k = 0$. Reduziu-se então o problema à resolução da equação de primeira ordem

$$\dot{y} = V(y) \Leftrightarrow \dot{y} = \frac{1}{2}e^y \Leftrightarrow e^{-y}\dot{y} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow -e^{-y} = \frac{t}{2} + c.$$

Da condição inicial obtém-se $c = -1$; portanto a solução do problema de valor inicial é dada por

$$-e^{-y} = \frac{t}{2} - 1 \Leftrightarrow y = -\log\left(1 - \frac{t}{2}\right).$$

Note-se que o intervalo máximo de definição desta solução é $]-\infty, 2[$ (a solução explode em $t = 2$).