Exercícios-Desafio de AMIV

Nota Importante: *Não é recomendável e é altamente desaconselhado o investimento de tempo na tentativa de resolução destes exercícios por quem ainda não tenha resolvido com sucesso e relativa facilidade os exercícios-teste semanais e uma quantidade bastante substancial de exercícios propostos.*

1. Considere as matrizes reais 2×2

$$\mathbf{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{i} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

As matrizes da forma $a\mathbf{1} + b\mathbf{i}$ com $a, b, \in \mathbb{R}$ formam um corpo isomorfo a $\mathbb{C}$. Explique porquê.

2. Considere agora as matrizes complexas 2×2

$$\mathbf{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{i} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{j} = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{k} = \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}.$$

a) Verifique que

$$\mathbf{i}^2 = \mathbf{j}^2 = \mathbf{k}^2 = -1 \;\; ; \;\; \mathbf{ij} = -\mathbf{ji} = \mathbf{k} \;\; ; \;\; \mathbf{jk} = -\mathbf{kj} = \mathbf{i} \;\; ; \;\; \mathbf{ki} = -\mathbf{ik} = \mathbf{j} \;\; .$$

b) As matrizes da forma $a\mathbf{1} + b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k}$ com $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ formam os chamados *quaterniões*, ou *números de Hamilton*, e são uma extensão da noção de número complexo. O conjunto $\mathbb{Q}$ dos quaterniões é simplesmente $\mathbb{R}^4$ com a estrutura de produto dada pela representação matricial acima. Este produto é distributivo em relação à soma e tem elemento neutro, mas não é comutativo. Explique porquê.

c) Dado um quaternião escrito na forma simplificada $a + bi + cj + dk$, a diz-se a *parte real* e $\mathbf{u} = bi + cj + dk$ a *parte vectorial.* Mostre que

$$(a + \mathbf{u})(b + \mathbf{v}) = ab + a\mathbf{v} + b\mathbf{u} - \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{u} \times \mathbf{v}$$

(onde usámos as habituais operações vectoriais em $\mathbb{R}^3$ aplicadas às partes vectoriais; esta é aliás a origem da notação ainda hoje de uso corrente de representar os versores dos eixos coordenados em $\mathbb{R}^3$ pelas letras i, j, k).

d) Resova a equação $q^2 = -1$ em $\mathbb{Q}$.

e) O *conjugado* de $q = a + \mathbf{u}$ é o quaternião $\overline{q} = a - \mathbf{u}$, e o *módulo* de q é o número real $|q| = \sqrt{a^2 + \|u\|^2}$. Mostre que $q\overline{q} = |q|^2$.

f) Dado um quaternião $q \neq 0$ construa o seu *inverso*, i.e., construa o quaternião q^{-1} tal que $qq^{-1} = q^{-1}q = 1$. Explique porque é que este inverso é único.

Portanto os quaterniões só não formam um corpo porque o produto de quaterniões não é comutativo. Diz-se então que os quaterniões formam um *anel de divisão.*

3. É um teorema de Análise Complexa (o *teorema de Picard*) que o contradomínio de qualquer função inteira não constante é ou $\mathbb{C}$ ou $\mathbb{C}$ excepto um ponto. Por exemplo o contradomínio de z é $\mathbb{C}$, enquanto que o contradomínio de e^z é $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ (a exponencial nunca se anula, já que $|e^z| = e^{Re(z)} > 0$).

   Considere agora a função inteira e^{e^z}. Como uma exponencial nunca se anula, e^{e^z} nunca assume o valor 0; mas como e^z nunca se anula, e^{e^z} nunca assume o valor $e^0 = 1$. Isto contradiz o Teorema de Picard. Onde é que está o erro neste raciocínio?

4. Mostre que série de funções
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \operatorname{sen}(nx)$$
converge uniformemente em $\mathbb{R}$, mas que a série das derivadas
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \cos(nx)$$
nem sequer converge para certos valores de x. Cada função $\operatorname{sen}(nx)$ é a restrição a $\mathbb{R}$ da função inteira $\operatorname{sen}(nz)$. Como explica então que a série não possa ser derivada termo a termo?

5. As *equações de Euler* para o escoamento estacionário de um fluido ideal são dadas por
$$\rho(\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v} = -\nabla p, \quad \nabla \cdot \mathbf{v} = 0$$
$\mathbf{v}(\mathbf{x})$ é a velocidade do elemento de fluido na posição $\mathbf{x}$, $p(\mathbf{x})$ é a pressão na mesma posição, e ρ é a densidade (constante) do fuido. A primeira equação traduz a lei de Newton $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$, e a segunda a conservação da massa. Um escoamento diz-se *bidimensional* se $\mathbf{v}(\mathbf{x}) = (u(x,y), v(x,y), 0)$. Considere um escoamento bidimensional.

   a) Mostre que as equações de Euler se reduzem a
$$\rho\left(u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y}\right) = -\frac{\partial p}{\partial x}, \quad \rho\left(u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y}\right) = -\frac{\partial p}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0.$$

   b) A *vorticidade* do fluido é a quantidade
$$\omega = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}.$$

Uma *linha de escoamento* é a trajectória de um elemento de fluido, i.e., é uma curva cujo vector tangente em cada ponto é $\mathbf{v}$. Mostre que a vorticidade é constante ao longo das linhas de escoamento, i.e., mostre que

$$\frac{\partial \omega}{\partial \mathbf{v}} = 0.$$

Conclua que se o escoamento possui velocidade uniforme $\mathbf{v} = (U, 0, 0)$ no infinito então a vorticidade é nula em todas as linhas de escoamento ilimitadas.

c) Se a vorticidade é nula o escoamento diz-se *irrotacional*. Mostre que se o escoamento é irrotacional então a função complexa $f = u - iv$ é holomorfa.

d) Assuma que o escoamento é irrotacional. Se o escoamento está definido numa região simplesmente conexa, existe um *potencial complexo* para o escoamento, i.e., uma função holomorfa $w = \phi + i\psi$ tal que $f = \frac{dw}{dz}$. Mostre que as linhas de escoamento estão contidas nas curvas de nível de ψ.

e) Esboce as linhas de escoamento correspondentes aos potenciais complexos $w = Uz$ e $w = az^2$ $(U, a \in \mathbb{R}^+)$. Para o segundo potencial a origem é um *ponto de estagnação*, i.e., um ponto no qual a velocidade do fluido se anula. Explique porque é que qualquer ponto de estagnação de qualquer escoamento irrotacional no qual $\frac{df}{dz} \neq 0$ possui uma vizinhança na qual o escoamento é bem aproximado pelo escoamento correspondente ao potencial $w = az^2$ (rodado de um certo ângulo).

f) Explique porque é que os potenciais $w = \frac{Q}{2\pi} \log z$ e $w = -\frac{i\Gamma}{2\pi} \log z$, apesar de não serem holomorfos em $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, definem ainda assim escoamentos irrotacionais em $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. Esboce as linhas de escoamento correspondentes. (O primeiro potencial representa uma *fonte* de intensidade Q, enquanto o segundo representa um *vórtice* de intensidade Γ).

g) Prove o *teorema de Milne-Thomson*: se um certo escoamento possui o potencial complexo $w = g(z)$ e todas as singularidades de $g(z)$ se situam na região $|z| > a$ então

$$w = g(z) + \overline{g\left(a^2/\overline{z}\right)}$$

é o potencial complexo para um escoamento com as mesmas singularidades de $g(z)$ em $|z| > a$ possuindo a circunferência $|z| = a$ como linha de escoamento.

h) Use as alíneas 5e) e 5g) para obter um escoamento irrotacional de um fluido ideal com velocidade uniforme $\mathbf{v} = (U, 0, 0)$ no infinito na presença do cilindro $x^2 + y^2 \leq a^2$. Explique porque é que o escoamento irrotacional mais geral que satisfaz estas condições é dado pelo potencial complexo

$$w = U\left(z + \frac{a^2}{z}\right) - \frac{i\Gamma}{2\pi} \log z.$$

Suponha que $\Gamma < 0$. Definindo o parâmetro positivo

$$B = -\frac{\Gamma}{2\pi U a}$$

mostre que o escoamento possui dois pontos de estagnação no cilindro se $B \leq 2$ e apenas um *fora* do cilindro se $B > 2$.

i) Prove o *teorema de Bernoulli*: $p + \frac{1}{2}\rho\mathbf{v}^2$ é constante ao longo de qualquer escoamento irrotacional. Explique porque é que no escoamento da alínea anterior (com $\Gamma < 0$) o cilindro sofre uma força vertical de baixo para cima. (Este escoamento pode obter-se fazendo o cilindro rodar no sentido horário; é por motivos semelhantes que uma bola de ténis lançada com *top spin* tende a baixar, enquanto que uma bola de ténis lançada com *back spin* tende a flutuar, ou que uma bola de futebol chutada com a parte interior do pé direito tende a curvar para a esquerda, enquanto que uma bola de futebol chutada com a parte interior do pé esquerdo tende a curvar para a direita. Esta força aerodinâmica sobre objectos em rotação é por vezes chamada *efeito de Magnus*).

j) Prove o *teorema de Blasius*: A força (por unidade de comprimento na direcção do eixo dos zz) exercida pelo fluido sobre qualquer corpo fixo cuja fronteira é uma curva de Jordan C é dada por

$$F_x - iF_y = \frac{1}{2}i\rho \oint_C \left(\frac{dw}{dz}\right)^2 dz.$$

Use este resultado para mostrar que a força exercida sobre um cilindro em rotação é dada por

$$F_x = 0, \quad F_y = -\rho U \Gamma.$$

k) Prove o *teorema de Kutta-Joukowski*: Se o fluido possui velocidade uniforme $\mathbf{v} = (U, 0, 0)$ no infinito então a força exercida pelo fluido sobre um corpo cuja fronteira é uma curva de Jordan C é dada por

$$F_x = 0, \quad F_y = -\rho U \Gamma.$$

onde

$$\Gamma = \oint_C u dx + v dy$$

é a circulação da velocidade do fluido em redor do corpo. (**Sugestão:** *Note que supondo que* $0 \in \operatorname{int} C$ *este escoamento tem necessariamente que satisfazer* $\frac{dw}{dz} = U + \frac{a_1}{z} + \frac{a_2}{z^2} + \ldots$).

l) Seja $Z = Z(z)$ uma função holomorfa no exterior de C com inversa $z = z(Z)$. Explique porque é que $W(Z) = w(z(Z))$ é um potencial complexo para um escoamento em torno de um corpo cuja fronteira é $Z(C)$ (nas coordenadas (X, Y), $Z = X + iY$). Mostre que os dois escoamentos possuem a mesma circulação Γ em torno de $C, Z(C)$.

m) Pela fórmula de Taylor

$$Z - Z_0 = \frac{dZ}{dz}(z_0)(z - z_0) + \frac{1}{2}\frac{d^2Z}{dz^2}(z_0)(z - z_0)^2 + \ldots.$$

Portanto se $\frac{dZ}{dz}(z_0) \neq 0$ o efeito local da aplicação $Z = Z(z)$ é o de rodar (e expandir) o vector $z - z_0$ (por este motivo este tipo de transformações são por vezes chamadas *transformações conformes*). O que acontece à imagem de C se num certo $z_0 \in C$ se tem $\frac{dZ}{dz}(z_0) = 0$ (mas $\frac{d^2Z}{dz^2}(z_0) \neq 0$)?

n) Considere a *transformação de Joukowski*

$$Z = z + \frac{a^2}{z}.$$

Esboce a imagem por esta transformação da circunferência $|z+\lambda| = a+\lambda$ $(\lambda, a > 0)$.

o) Obtenha o potencial complexo para o escoamento irrotacional em torno do cilindro $|z + \lambda| = a + \lambda$ com circulação Γ cuja velocidade no infinito é dada por $u + iv = Ue^{i\alpha}$ (e portanto forma um ângulo α com o eixo dos xx). Mostre que aplicando a transformação de Joukowski se obtém um escoamento semelhante em torno do corpo em forma de asa obtido na alínea anterior, satisfazendo

$$\frac{dW}{dZ} = \frac{\frac{dw}{dz}}{\frac{dZ}{dz}} = \left\{ U\left[e^{-i\alpha} - \left(\frac{a+\lambda}{z+\lambda}\right)^2 e^{i\alpha}\right] - \frac{i\Gamma}{2\pi(z+\lambda)}\right\} \Big/ \left(1 - \frac{a^2}{z^2}\right).$$

p) Mostre que a velocidade do escoamento da alínea anterior é finita no exterior da asa se e só se é satisfeita a *condição de Kutta*:

$$\Gamma = -4\pi U(a+\lambda)\,\mathrm{sen}\,\alpha.$$

Mostre que para $\lambda << a$ o comprimento da asa é aproximadamente $s = 4a$, e portanto a força sobre a asa é aproximadamente

$$L = s\rho U^2 \pi\,\mathrm{sen}\,\alpha$$

na direcção perpendicular à do escoamento no infinito, onde α é o *ângulo de ataque* entre a asa e a direcção do escoamento no infinito. Esta é a origem da força de sustentação sobre uma asa de perfil simétrico a velocidades subsónicas. Note que esta força é proporcional ao comprimento da asa s, à *pressão dinâmica* $\frac{1}{2}\rho U^2$ e ao seno do ângulo de ataque.

Esta fórmula para a força de sustentação de uma asa só é válida para pequenos ângulos de ataque. Na realidade a equação de Euler ignora por completo os efeitos da *viscosidade*, i.e., do atrito entre as diversas camadas de fluido (por exemplo, o teorema de Kutta-Joukowski prevê que um corpo exposto a um escoamento uniforme no infinito não sente qualquer força na direcção do escoamento, contrariamente à mais elementar experiência). Esta viscosidade faz com que o fluido abrande na vizinhança de um corpo sólido, sendo a sua velocidade zero na superfície deste. Para fluidos de pequena viscosidade (como o ar) e para corpos de forma aerodinâmica alinhados com o escoamento existe geralmente uma *camada-limite* de pequena espessura em torno do corpo ao longo da qual a velocidade do fluido varia rapidamente desde zero até ao valor previsto pela teoria acima. (Para um avião comercial em condições de vôo usuais a camada-limite nas asas tem uma espessura da ordem de 1 centímetro). Se o ângulo de ataque é aumentado em demasia, esta camada-limite descola da asa, a teoria acima deixa de ser aplicável e dá-se uma perda súbita de sustentação (*stall*).