Resumos de AMIV

José Natário

25 de Junho de 2001

I. Análise Complexa

1. Uma função $f : U \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ diz-se *diferenciável* em $z_0 \in U$ se existe
$$\lim_{z\to z_0} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} = \lim_{h\to 0} \frac{f(z_0+h)-f(z_0)}{h} = f'(z_0).$$
2. Se $f = u + iv$, f é diferenciável em $z_0 = x_0 + iy_0$ *sse* u e v são diferenciáveis em (x_0, y_0) e satisfazem nesse ponto as *equações de Cauchy-Riemann*:
$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y} \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{\partial v}{\partial x} \end{cases}.$$
Nesse caso,
$$f'(z_0) = \frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0) + i\frac{\partial v}{\partial x}(x_0,y_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0,y_0) - i\frac{\partial u}{\partial y}(x_0,y_0).$$
3. Uma função diz-se *holomorfa*, ou *analítica*, se é diferenciável num conjunto aberto. Uma função holomorfa em $\mathbb{C}$ diz-se *inteira*.
4. Se $C \subset \mathbb{C}$ é uma curva C^1 parametrizada por $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ então
$$\int_C f(z)dz = \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)dt.$$
Uma curva fechada *simples* (i.e., sem auto-intersecções) diz-se uma *curva de Jordan*. Qualquer curva de Jordan divide $\mathbb{C}$ em duas regiões, uma das quais limitadas, à qual chamamos o *interior* de C, $\operatorname{int}(C)$.
5. *Teorema de Cauchy:* Se C é uma curva de Jordan e f é holomorfa em $\operatorname{int}(C)$ então
$$\oint_C f(z)dz = 0.$$
6. *Fórmula Integral de Cauchy:* Se C é uma curva de Jordan, f é holomorfa em $\operatorname{int}(C)$ e $z_0 \in \operatorname{int}(C)$ então
$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz,$$
onde C deve ser percorrida uma vez no sentido directo.

7. *Teorema de Morera:* Se $f : U \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ é tal que para qualquer curva de Jordan $C \subset U$ se tem

$$\oint_C f(z)dz = 0$$

então existe $F : U \to \mathbb{C}$ tal que $F' = f$. Em particular, f é holomorfa.

8. Se $f : U \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ é holomorfa e $f = u + iv$ então u e v são funções *harmónicas*, i.e., u e v satisfazem a *equação de Laplace*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0,$$

e dizem-se *harmónicas conjugadas*. Se $u : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ é harmónica e U é simplesmente conexo é sempre possível determinar a sua harmónica conjugada $v : U \to \mathbb{R}$ resolvendo as equações de Cauchy-Riemann em ordem a v.

9. *Teorema de Taylor:* Se f é holomorfa no disco $|z - z_0| < r$ então f pode ser expandida em série de potências em torno de z_0,

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^n.$$

Esta série converge no interior do maior disco centrado em z_0 no qual f é holomorfa, e pode ser integrada e derivada termo a termo.

10. *Teorema de Laurent:* Se f é holomorfa no anel $r < |z - z_0| < R$ então f pode ser expandida em série de potências negativas e positivas em torno de z_0,

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n(z - z_0)^n.$$

Esta série pode ser integrada e derivada termo a termo.

11. Diz-se que f tem uma *singularidade isolada* em $z_0 \in \mathbb{C}$ se f é holomorfa nalgum disco perfurado $0 < |z - z_0| < r$. Neste caso, f tem uma expansão em série de Laurent

$$f(z) = \ldots + \frac{a_{-2}}{(z - z_0)^2} + \frac{a_{-1}}{z - z_0} + a_0 + a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + \ldots\ .$$

O coeficiente a_{-1} desta expansão diz-se o *resíduo* de f em z_0,

$$\operatorname{Res}(f)(z_0) = a_{-1}.$$

Diz-se que f tem um *pólo de ordem* $n \in \mathbb{N}$ em z_0 se a potência negativa de maior ordem em valor absoluto presente na expansão é $(z - z_0)^{-n}$,

$$f(z) = \frac{a_{-n}}{(z - z_0)^n} + \ldots + \frac{a_{-2}}{(z - z_0)^2} + \frac{a_{-1}}{z - z_0} + a_0 + a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + \ldots$$

com $a_{-n} \neq 0$. Se a expansão apresenta potências negativas de ordens arbitrariamente altas em valor absoluto diz-se que f tem uma *singularidade essencial* em z_0. Se a expansão não apresenta potências negativas diz-se que f tem uma *singularidade removível* em z_0.

12. É possível mostrar que se f tem uma singularidade isolada em $z_0 \in \mathbb{C}$, esta é removível *sse* existe o limite

$$\lim_{z \to z_0} f(z),$$

é um pólo de ordem n *sse* existe e é $\neq 0$ o limite

$$\lim_{z \to z_0} (z - z_0)^n f(z),$$

e é uma singularidade essencial se o limite acima não existe para qualquer $n \in \mathbb{N}$. Se z_0 é uma singularidade removível, $\mathrm{Res}(f)(z_0) = 0$. Se z_0 é um pólo de ordem n, é possível mostrar que

$$\mathrm{Res}(f)(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{1}{(n-1)!} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} \left[(z - z_0)^n f(z) \right].$$

Se z_0 é uma singularidade essencial, o cálculo do resíduo tem que ser feito recorrendo directamente à expansão em série de Laurent.

13. *Teorema dos Resíduos:* Se C é uma curva de Jordan percorrida uma vez no sentido directo e f só possui singularidades isoladas $z_1, \ldots, z_k \in \mathrm{int}(C)$ então

$$\oint_C f(z) dz = 2\pi i \sum_{j=1}^{k} \mathrm{Res}(f)(z_j).$$

14. Uma aplicação comum do Teorema dos Resíduos é no cálculo de integrais de funções racionais em $\mathbb{R}$, como por exemplo

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx,$$

e integrais de funções racionais de senos e cosenos em $[0, 2\pi]$, como por exemplo

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{2 + \cos\theta} d\theta.$$

II. Equações Diferenciais Ordinárias

1. Equações Escalares de Primeira Ordem
   i. Uma equação escalar de primeira ordem *linear* é da forma

   $$\dot{y} + a(t) y = b(t).$$

   Definindo

   $$\mu(t) = e^{\int a(t) dt}$$

   a equação pode ser reescrita como

   $$\frac{d}{dt}(\mu(t) y(t)) = \mu(t) b(t)$$

   e a solução é

   $$y(t) = \frac{1}{\mu(t)} \left[\int \mu(t) b(t) dt + C \right].$$

ii. Uma equação escalar de primeira ordem diz-se *separável* se pode ser posta na forma

$$f(y)\dot{y} = g(t).$$

A solução desta equação é dada implicitamente por

$$\int f(y)dy = \int g(t)dt + C.$$

iii. Uma equação escalar de primeira ordem diz-se *exacta* se pode ser escrita na forma

$$M(t, y) + N(t, y)\dot{y} = 0$$

com (M, N) um campo fechado, i.e., com (M, N) satisfazendo

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial t}.$$

Neste caso, tem-se localmente

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \phi}{\partial t} = M \\ \frac{\partial \phi}{\partial y} = N \end{array} \right. .$$

Esta equação pode ser resolvida para ϕ, e a solução da equação exacta é dada de forma implícita por

$$\phi(t, y) = C.$$

iv. Qualquer equação escalar de primeira ordem é *redutível a exacta*, i.e., pode ser transformada numa equação exacta multiplicando-a por uma função $\mu(t, y)$ apropriada. À função μ chama-se um *factor integrante* para a equação, e pode der calculado resolvendo

$$\frac{\partial(\mu M)}{\partial y} = \frac{\partial(\mu N)}{\partial t}.$$

Em geral só podemos procurar factores integrante que só dependam de uma das variáveis. Se por exemplo escolhermos $\mu = \mu(t)$ obtemos a equação separável

$$\dot{\mu} = \frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial t}}{N}\mu$$

caso o membro da direita não dependa de y. Se escolhermos $\mu = \mu(y)$ obtemos a equação separável

$$\mu' = \frac{\frac{\partial N}{\partial t} - \frac{\partial M}{\partial y}}{M}\mu$$

caso o membro da direita não dependa de t. A solução da equação inicial será em qualquer dos casos dada por

$$\phi(t, y) = C$$

onde ϕ satisfaz

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \phi}{\partial t} = \mu M \\ \frac{\partial \phi}{\partial y} = \mu N \end{array} \right. .$$

2. Existência, Unicidade e Prolongamento
   i. *Teorema de Picard-Lindelöf:* Se $f : U \subset \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^n$ é contínua em $(t, \mathbf{y}) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ e *localmente Lipzshitziana* em $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ então o problema de valor inicial

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{y}} = f(t, \mathbf{y}) \\ \mathbf{y}(t_0) = \mathbf{y}_0 \end{cases}$$

   possui uma e uma só solução nalgum intervalo $]a, b[\ni t_0$.
   ii. Se $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{y}}$ é contínua em $U \subset \mathbb{R}^{n+1}$ então f é localmente Lipschitziana em U.
   iii. A solução única do problema de valor inicial no Teorema de Picard-Lindelöf pode ser prolongada a um intervalo máximo de definição $]a, b[$. Se $b \neq +\infty$ então ou $\mathbf{y}$ *explode* para $t = b$, i.e., $\lim_{t\to b} \|\mathbf{y}(t)\| = +\infty$, ou $(t, \mathbf{y}(t))$ tende para a fronteira do domínio de f quando $t \to b$. O mesmo se passa com o outro extremo do intervalo.
3. Sistemas de Equações Lineares de Coeficientes Constantes
   i. *Sistemas Homogéneos:* O problema de valor inicial

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{y}} = A\mathbf{y} \\ \mathbf{y}(t_0) = \mathbf{y}_0 \end{cases}$$

   (onde A é uma matriz *constante*) tem solução

$$\mathbf{y}(t) = e^{A(t-t_0)}\mathbf{y}_0.$$

   ii. Qualquer matriz $n \times n$ A se pode escrever na forma

$$A = SJS^{-1}$$

   onde

$$J = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 & & & & & & \\ & \lambda_1 & 1 & & & & & \\ & & \cdots & \cdots & & & & \\ & & & \lambda_1 & & & & \\ & & & & \cdots & & & \\ & & & & & \lambda_k & 1 & \\ & & & & & & \cdots & \cdots \\ & & & & & & & \lambda_k \end{pmatrix}$$

   é a *forma canónica de Jordan* da matriz A. Cada bloco corresponde a um vector próprio, sendo a diagonal preenchida com o vector próprio correspondente. Cada valor próprio tem direito a tantos blocos quantos os vectores próprios linearmente independentes que possui, e a soma das dimensões desses blocos deve ser igual à multiplicidade algébrica do valor próprio como raiz do polinómio característico. Tem-se

$$e^{At} = Se^{Jt}S^{-1}$$

onde

$$e^{Jt} = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & te^{\lambda_1 t} & \frac{t^2}{2!}e^{\lambda_1 t} & \dots & & & & \\ & e^{\lambda_1 t} & te^{\lambda_1 t} & \dots & & & & \\ & & \dots & \dots & & & & \\ & & & e^{\lambda_1 t} & & & & \\ & & & & \dots & & & \\ & & & & & e^{\lambda_k t} & te^{\lambda_k t} & \dots \\ & & & & & & \dots & \dots \\ & & & & & & & e^{\lambda_k t} \end{pmatrix}.$$

iii. *Sistemas Não Homogéneos:* O problema de valor inicial

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{y}} = A\mathbf{y} + \mathbf{b}(t) \\ \mathbf{y}(t_0) = \mathbf{y}_0 \end{cases}$$

tem solução dada pela *fórmula de variação das constantes:*

$$\mathbf{y}(t) = e^{A(t-t_0)}\mathbf{y}_0 + e^{At}\int_{t_0}^{t} e^{-As}\mathbf{b}(s)ds.$$

4. Equações Escalares Lineares de Coeficientes Constantes
   i. *Equação Homogénea:*

   $$(D-\lambda)^n y = 0 \Leftrightarrow y(t) = A_1 e^{\lambda t} + A_2 t e^{\lambda t} + \ldots + A_n t^{n-1} e^{\lambda t}.$$

   No caso em que λ é uma constante complexa é possível obter soluções reais extraindo as partes reais e imaginárias destas soluções.
   ii. *Método dos Coeficientes Indeterminados:* Para resolver a equação não-homogénea no caso em que é possível encontrar um polinómio aniquilador para o termo não-homogéneo.
   iii. *Fórmula de Variação das Constantes:* Para resolver a equação não-homogénea no caso em que não é possível encontrar um polinómio aniquilador para o termo não-homogéneo.
5. Redução de ordem: é possível reduzir a resolução da equação de segunda ordem

$$\ddot{y} = f(y, \dot{y})$$

à resolução de duas equações de primeira ordem procurando uma função $V : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que

$$\dot{y}(t) = V(y(t)).$$

Nesse caso temos

$$\ddot{y} = V'V$$

e portanto V deve satisfazer a equação de primeira ordem

$$V' = \frac{1}{V} f(y, V),$$

obtendo-se y(t) por resolução da equação separável

$$\dot{y} = V(y).$$

III. Equações Diferenciais Parciais

1. Série de Fourier da função seccionalmente C^1 $f : [\alpha, \alpha + L] \to \mathbb{R}$:

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos\left(\frac{2n\pi x}{L}\right) + \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \operatorname{sen}\left(\frac{2n\pi x}{L}\right)$$

onde

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{L} \int_{\alpha}^{\alpha+L} f(x) dx; \\ a_n &= \frac{2}{L} \int_{\alpha}^{\alpha+L} f(x) \cos\left(\frac{2n\pi x}{L}\right) dx; \\ b_n &= \frac{2}{L} \int_{\alpha}^{\alpha+L} f(x) \operatorname{sen}\left(\frac{2n\pi x}{L}\right) dx. \end{aligned}$$

Esta série converge para $f(x)$ nos pontos $x \in]\alpha, \alpha + L[$ em que f é contínua; para $\frac{1}{2}[f(x^-) + f(x^+)]$ nos pontos $x \in]\alpha, \alpha + L[$ em que f é descontínua; e para $\frac{1}{2}[f(\alpha) + f(\alpha + L)]$ nos extremos do intervalo.

2. Série de Fourier só de senos da função seccionalmente C^1 $f : [0, L] \to \mathbb{R}$:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

onde

$$b_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx.$$

3. Série de Fourier só de cosenos da função seccionalmente C^1 $f : [0, L] \to \mathbb{R}$:

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

onde

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{L} \int_0^L f(x) dx; \\ a_n &= \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx. \end{aligned}$$

4. Resolução de problemas bem postos envolvendo Equações Diferenciais Parciais:

i. Se a equação ou as condições de fronteira não forem homogéneos, subtrair uma solução particular apropriada de modo a obter um problema homogéneo.
ii. Para resolver um problema homogéneo, separar variáveis, impondo todas as condições de fronteira/iniciais homogéneas. Escrever a solução como uma série de funções e impor as condições de fronteira/iniciais não homogéneas usando séries de Fourier.