Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

Análise Matemática IV - 2º Semestre 2000/2001
2º Teste - 29 de Junho de 2001 - 17 h

Duração do teste: 1 hora e 30 minutos
Apresente todos os cálculos e justificações relevantes.

(2 val.) **1.** Resolva o seguinte problema de valor inicial e indique o intervalo máximo de definição:

$$\begin{cases} 3t + 2y^3 + 3ty^2\dot{y} = 0 \\ y(1) = 1 \end{cases}$$

(3 val.) **2.** Resolva o seguinte problema de valor inicial:

$$\begin{cases} \ddot{y} - 2\dot{y} + 2y = 2t - 2 \\ y(0) = 0 \\ \dot{y}(0) = 1 \end{cases}$$

3. Pretende-se resolver o problema

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \\ \\ \dfrac{\partial u}{\partial x}(t,0) = \dfrac{\partial u}{\partial x}(t,\pi) = 1 \\ \\ u(0,x) = 0 \end{cases}$$

($t \geq 0, x \in]0,\pi[$), correspondente a uma barra aquecida na extemidade $x = \pi$ e arrefecida na extremidade $x = 0$.

(1 val.) a) Calcule a expansão em série de cosenos da função $f : [0,\pi] \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x$.

(1 val.) b) Determine uma solução estacionária que satisfaça também as condições de fronteira.

(1 val.) c) Resolva o problema.

4. Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^1 e $y_0 \in]-1,1[$. Considere o problema de valor inicial

$$\begin{cases} \dot{y} = \left(y^2 - 1\right) f(t,y) \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

(0,5 val.) a) Mostre que este problema tem uma única solução numa vizinhança de $t = 0$.

(1,5 val.) b) Mostre que a solução está definida para todo o $t \geq 0$.