Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

Análise Matemática IV

2º Semestre 2000/2001

1º Teste - Todos os cursos excepto LEFT, LMAC

28 de Abril de 2001

Duração: 1 hora e 30 minutos
Apresente todos os cálculos e justificações relevantes.

1. Seja $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ a função definida por

$$u(x, y) = e^{-y} \cos x + y(x - 1).$$

(2 val.) a) Mostre que u é harmónica.

(2 val.) b) Determine uma função harmónica $v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que a função $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definida por

$$f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$$

seja analítica e satisfaça $f(0) = 1$.

(2 val.) c) Calcule

$$\oint_C \frac{f(z)}{(z - i)^2} dz$$

onde C é a circunferência de centro na origem e raio 2 percorrida uma vez no sentido directo.

2. Seja $f : \mathbb{C} \setminus \{1\} \to \mathbb{C}$ dada por

$$f(z) = z^2 + (z - 1) \exp\left\{\frac{4}{(z - 1)^2}\right\}.$$

(2 val.) a) Obtenha a série de Laurent de f que é convergente em $\mathbb{C} \setminus \{1\}$. Indique e classifique a(s) singularidade(s) de f.

(2 val.) b) Seja C_1 a circunferência de centro em $z = 1 + i$ e raio 3, percorrida uma vez no sentido directo, e C_2 a circunferência de centro em $z = 1 + i$ e raio $\frac{1}{3}$, percorrida uma vez no sentido directo. Calcule

$$\oint_{C_1} f(z) dz \quad \text{e} \quad \oint_{C_2} f(z) dz.$$

(4 val.) **3.** Calcule o integral real

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(1 + x^2)^2}.$$

Justifique cuidadosamente a resposta.

Volte S. F. F.

(4 val.) **4.** Determine a solução do seguinte problema de valor inicial:

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} - \dfrac{2t}{1+t^2}y = 1 \\ \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

(2 val.) **5.** Mostre que se f e $\overline{f}$ são analíticas em $\mathbb{C}$ então f é constante.