Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

Análise Matemática III - Turma Especial

1º Teste - 4 de Novembro de 2003 - 11h

Duração: 1 hora e 30 minutos.
Apresente todos os cálculos e justificações relevantes.

1. Considere o elipsóide

$$E = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \right\} \qquad (a,b,c > 0),$$

e seja $(x_0, y_0, z_0) \in E$ com $x_0, y_0, z_0 > 0$.

(2 val.) (a) Escreva a equação do plano tangente a E no ponto (x_0, y_0, z_0).
Solução: $\frac{x_0}{a^2}x + \frac{y_0}{b^2}y + \frac{z_0}{a^2}z = 1.$

(2 val.) (b) Determine o volume da pirâmide limitada pelo plano tangente a E no ponto (x_0, y_0, z_0) e pelos planos coordenados.
Resolução: Fazendo a mudança de variável

$$(x,y,z) = \left(\frac{a^2}{x_0}u, \frac{b^2}{y_0}y, \frac{c^2}{z_0}z \right),$$

cujo Jacobiano é

$$J = \frac{a^2b^2c^2}{x_0y_0z_0},$$

o volume pedido escreve-se

$$V(x_0,y_0,z_0) = \int_0^1 \int_0^{1-u} \int_0^{1-u-v} \frac{a^2b^2c^2}{x_0y_0z_0} dwdvdu = \frac{a^2b^2c^2}{6x_0y_0z_0}.$$

(3 val.) (c) Para que ponto (x_0, y_0, z_0) o volume desta pirâmide é mínimo? Justifique cuidadosamente a sua resposta.
Resolução: Pelo método dos multiplicadores de Lagrange, o ponto de mínimo da função $V(x_0, y_0, z_0)$ na variedade $M = \{(x_0, y_0, z_0) \in E : x_0, y_0, z_0 > 0\}$, a existir, terá que satisfazer

$$\begin{cases} -\dfrac{a^2b^2c^2}{6x_0^2y_0z_0} + \lambda\dfrac{2x_0}{a^2} = 0 \\[2ex] -\dfrac{a^2b^2c^2}{6x_02y_0^2z_0} + \lambda\dfrac{2y_0}{b^2} = 0 \\[2ex] -\dfrac{a^2b^2c^2}{6x_0y_0z_0^2} + \lambda\dfrac{2z_0}{c^2} = 0 \\[2ex] \dfrac{x_0^2}{a^2} + \dfrac{y_0^2}{b^2} + \dfrac{z_0^2}{c^2} = 1 \end{cases} \Rightarrow \frac{x_0^2}{a^2} = \frac{y_0^2}{b^2} = \frac{z_0^2}{c^2} = \frac{1}{3}.$$

A existir, o ponto de mínimo será portanto $\left(\frac{\sqrt{3}a}{3}, \frac{\sqrt{3}b}{3}, \frac{\sqrt{3}c}{3}\right)$.

Mostramos agora que existe ponto de mínimo. Dado que V é positiva em M, existe certamente ínfimo m de V em M. Logo existe uma sucessão $\mathbf{x}_n$ de termos em M tal que $V(\mathbf{x}_n) \to m$. Como M é limitado, $\mathbf{x}_n$ admite uma subsucessão convergente para $\mathbf{x}_0 \in \overline{M}$. Se $\mathbf{x}_0 \in \overline{M} \setminus M$, teríamos $V(\mathbf{x}_n) \to +\infty$, uma vez que $x_0y_0z_0 = 0$ em $\overline{M} \setminus M$. Concluímos que $\mathbf{x}_0 \in M$ é ponto de mínimo.

2. Seja $B_r^n \subset \mathbb{R}^n$ a bola de centro em $\mathbf{0}$ e raio $r > 0$, e $B^n = B_1^n$.

(2 val.) (a) Mostre que

$$V_n(B_r^n) = r^n V_n(B^n).$$

Resolução: Seja $\mathbf{g} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ a mudança de variável dada por $\mathbf{g}(\mathbf{x}) = r\mathbf{x}$. Temos $D\mathbf{g} = rI \Rightarrow J\mathbf{g} = r^n$, e

$$V_n(B_r^n) = \int_{B_r^n} 1 = \int_{\mathbf{g}(B^n)} 1 = \int_{B^n} J\mathbf{g} = \int_{B^n} r^n = r^n \int_{B^n} 1 = r^n V_n(B^n).$$

(3 val.) (b) Mostre que

$$V_n(B^n) = \int_{B^2} \left(\int_{B^{n-2}_{\sqrt{1-u^2-v^2}}} 1 \right) dudv = \frac{2\pi}{n} V_{n-2}(B^{n-2}).$$

Resolução: A primeira igualdade é evidente do Teorema de Fubini. Portanto

$$\begin{aligned}
V_n(B^n) &= \int_{B^2} \left(\int_{B^{n-2}_{\sqrt{1-u^2-v^2}}} 1 \right) dudv = \int_{B^2} V_{n-2}\left(B^{n-2}_{\sqrt{1-u^2-v^2}}\right) dudv \\
&= \int_{B^2} \left(1-u^2-v^2\right)^{\frac{n-2}{2}} V_{n-2}(B^{n-2}) dudv \\
&= V_{n-2}(B^{n-2}) \int_0^1 \int_0^{2\pi} \left(1-r^2\right)^{\frac{n-2}{2}} r d\theta dr \\
&= \frac{2\pi}{n} V_{n-2}(B^{n-2}).
\end{aligned}$$

(2 val.) (c) Calcule $V_4(B^4)$ e $V_5(B^5)$.

Solução: $V_4(B^4) = \frac{\pi^2}{2}$; $V_5(B^5) = \frac{8\pi^2}{15}$.

3. Seja D um conjunto aberto, $\mathbf{x}_0 \in D$ e $\mathbf{f} : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ uma função diferenciável em $\mathbf{x}_0$.

(2 val.) (a) Mostre que se $\mathbf{f}$ possui inversa local numa vizinhança de $\mathbf{x}_0$ diferenciável em $\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)$ então $m = n$.

Resolução: Seja $\mathbf{g}$ a inversa local de $\mathbf{f}$ e $\mathbf{y}_0 = \mathbf{f}(\mathbf{x}_0)$. Então

$$\mathbf{g}(\mathbf{f}(\mathbf{x})) = \mathbf{x} \Rightarrow D\mathbf{g}(\mathbf{y}_0) D\mathbf{f}(\mathbf{x}_0) = I$$

e

$$\mathbf{f}(\mathbf{g}(\mathbf{y})) = \mathbf{y} \Rightarrow D\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)D\mathbf{g}(\mathbf{y}_0) = I.$$

Concluímos que a aplicação linear $D\mathbf{f}(\mathbf{x}_0) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ é invertível, e portanto $m = n$ (a dimensão da imagem de uma aplicação linear injectiva tem que ser igual à dimensão do domínio; se a aplicação é sobrejectiva, a imagem coincide com o espaço de chegada).

(2 val.) (b) Mostre que se $m \geq n$, $\mathbf{f}$ é de classe C^1 e $D\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)$ possui característica máxima então existe um aberto $U \subset D$ contendo $\mathbf{x}_0$ no qual $\mathbf{f}$ é injectiva.

Resolução: Supomos sem perda de generalidade que as n primeiras linhas de $D\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)$ são linearmente independentes, e consideramos a aplicação $\mathbf{g} : D \to \mathbb{R}^n$ dada por

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}) = (f^1(\mathbf{x}), \ldots, f^n(\mathbf{x})).$$

Então $\det D\mathbf{g}(\mathbf{x}_0) \neq 0$; pelo Teorema da Função Inversa, $\mathbf{g}$ é localmente invertível em $\mathbf{x}_0$, pelo que é injectiva nalguma vizinhança aberta $U \ni \mathbf{x}_0$. Logo $\mathbf{f}$ tem que ser injectiva nessa vizinhança.

(2 val.) (c) Mostre que se $m \leq n$, $\mathbf{f}$ é de classe C^1 e $D\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)$ possui característica máxima então existe um aberto $U \subset D$ contendo $\mathbf{x}_0$ cuja imagem por $\mathbf{f}$ é aberta.

Resolução: Supomos sem perda de generalidade que as m primeiras colunas de $D\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)$ são linearmente independentes, e consideramos a aplicação $\mathbf{g} : D \to \mathbb{R}^n$ dada por

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}) = (f^1(\mathbf{x}), \ldots, f^m(\mathbf{x}), x^{m+1}, \ldots, x^n).$$

Então $\det D\mathbf{g}(\mathbf{x}_0) \neq 0$; pelo Teorema da Função Inversa, $\mathbf{g}$ é localmente invertível em $\mathbf{x}_0$, pelo que envia alguma vizinhança aberta $U \ni \mathbf{x}_0$ num aberto $V \subset \mathbb{R}^n$. Logo $\mathbf{f}$ envia U no aberto $\pi(V)$, onde $\pi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ é a projecção nas m primeiras coordenadas,

$$\pi(x^1, \ldots, x^m, x^{m+1}, \ldots, x^n) = (x^1, \ldots, x^m)$$

(é fácil mostrar que esta aplicação é *aberta*, i.e., envia abertos em abertos).