Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

Análise Matemática III - Turma Especial

1º exame - 6 de Janeiro de 2004 - 14h

Duração: 3 horas.
Apresente todos os cálculos e justificações relevantes.

(2 val.) **1.** Determine todos os extremos locais da função $f(x, y) = x^2 + 2y^2$ no conjunto

$$\left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\right\}.$$

Resolução: O conjunto em questão é compacto, pelo que f tem máximo e mínimo neste conjunto. No interior do conjunto o único ponto de estacionaridade é claramente a origem. Uma vez que $f(0, 0) = 0$ e $f(x, y) > 0$ para $(x, y) \neq (0, 0)$, este é o ponto de mínimo global da função. A fronteira do conjunto é a variedade de equação $x^2 + y^2 = 1$. Note-se que neste conjunto se tem $f(x, y) = 1 + y^2$. Para determinar os pontos de estacionaridade recorremos ao método dos multiplicadores de Lagrange:

$$\begin{cases} \nabla\left[1 + y^2 + \lambda(x^2 + y^2 - 1)\right] = \mathbf{0} \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda x = 0 \\ (1 + \lambda)y = 0 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

As soluções deste sistema determinam quatro pontos de estacionaridade: $(\pm 1, 0)$ e $(0, \pm 1)$. Uma vez que $f(\pm 1, 0) = 1$ e $f(0, \pm 1) = 2$, concluimos que $(0, \pm 1)$ são os pontos de máximo global da função. Os pontos $(\pm 1, 0)$ serão os pontos de mínimo da função restrita à fronteira; no entanto, uma vez que $f(x, 0) = x^2$, são pontos de máximo da função restrita aos pontos do conjunto que satisfazem a equação $y = 0$, pelo que são pontos de sela.

2. Recorde que é habitual definir

$$S^2 = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\right\}.$$

Seja $N = (0, 0, 1)$. Uma *circunferência* em S^2 de centro em N é a intersecção de S^2 com um plano de equação $z = z_0$ $(-1 < z_0 < 1)$. Um *meridiano* é um círculo máximo obtido intersectando S^2 com um plano contendo o eixo dos zz. Um *raio* da circunferência é a porção de um meridiano compreendida entre N e um ponto da circunferência. Um *círculo* em S^2 de centro em N é a região de S^2 limitada por uma circunferência de centro em N que contém N.

(2 val.) (a) Mostre que a razão entre o perímetro de uma circunferência em S^2 (de centro em N) e o comprimento do seu raio é inferior a 2π, mas converge para 2π quando o comprimento do raio tende para zero.

(2 val.) (b) Mostre que a razão entre a área de um círculo em S^2 (de centro em N) e o quadrado do comprimento do seu raio é inferior a π, mas converge para π quando o comprimento do raio tende para zero.

Resolução: Usamos a habitual parametrização de S^2 com coordenadas angulares esféricas $\mathbf{g} :]0,\pi[\times]-\pi,\pi[\to \mathbb{R}^3$,

$$\mathbf{g}(\theta,\varphi) = (\mathrm{sen}\theta\cos\varphi, \mathrm{sen}\theta\mathrm{sen}\varphi, \cos\theta).$$

Seja $\theta_0 \in]0,\pi[$ tal que $\cos\theta_0 = z_0$. Uma parametrização do círculo é então $\mathbf{g}$ restrita a $]0,\theta_0[\times]-\pi,\pi[$. Tem-se

$$\mathbf{g}^* dV_2 = \sqrt{\det D\mathbf{g}^t D\mathbf{g}}\ d\theta\wedge d\varphi = \sqrt{\det\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & \mathrm{sen}^2\theta\end{pmatrix}}\ d\theta\wedge d\varphi = \mathrm{sen}\theta\ d\theta\wedge d\varphi,$$

pelo que a área do círculo é

$$A = \int_{]0,\theta_0[\times]-\pi,\pi[} \mathrm{sen}\theta\ d\theta\wedge d\varphi = 2\pi(1-\cos\theta_0) = 4\pi\mathrm{sen}^2\left(\frac{\theta_0}{2}\right).$$

Uma parametrização da circunferência é $\mathbf{h} :]-\pi,\pi[\to\mathbb{R}^3$ dada por

$$\mathbf{h}(\varphi) = \mathbf{g}(\theta_0,\varphi) = (\mathrm{sen}\theta_0\cos\varphi, \mathrm{sen}\theta_0\mathrm{sen}\varphi, \cos\theta_0).$$

Tem-se

$$\mathbf{h}^* dV_1 = \left\|\frac{d\mathbf{h}}{d\varphi}\right\| d\varphi = \mathrm{sen}\theta_0\ d\varphi,$$

pelo que o perímetro da circunferência é

$$P = \int_{]-\pi,\pi[} \mathrm{sen}\theta_0\ d\varphi = 2\pi\mathrm{sen}\theta_0.$$

Uma parametrização do raio correspondente ao meridiano $\varphi = 0$ é $\mathbf{i} :]0,\theta_0[\to\mathbb{R}^3$ dada por

$$\mathbf{i}(\theta) = \mathbf{g}(\theta,0) = (\mathrm{sen}\theta, 0, \cos\theta).$$

Tem-se

$$\mathbf{i}^* dV_1 = \left\|\frac{d\mathbf{i}}{d\theta}\right\| d\theta = d\theta,$$

pelo que o comprimento do raio da circunferência é

$$R = \int_{]0,\theta_0[} d\theta = \theta_0.$$

As razões a analisar são

$$\frac{P}{R} = 2\pi\frac{\mathrm{sen}\theta_0}{\theta_0}$$

e

$$\frac{A}{R^2} = \pi \left(\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\theta_0}{2}\right)}{\frac{\theta_0}{2}} \right)^2 .$$

Uma vez que

$$\left|\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right| \leq 1, \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1,$$

vemos que estas razões são inferiores a 2π e π (respectivamente), mas convergem para estes valores quando $\theta_0 \to 0$.

(2 val.) **3.** Um campo vectorial $\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ diz-se *radial* se

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = f\left(\|\mathbf{x}\|^2\right)\ \mathbf{x}$$

para alguma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^1. Mostre que qualquer campo radial é necessariamente um gradiente, mas nunca um rotacional (a menos que seja identicamente nulo).

Resolução: Uma vez que $\nabla\|\mathbf{x}\|^2 = 2\mathbf{x}$, é imediato que definindo

$$g(t) = \int_0^t f(u)du$$

se tem

$$\nabla\left[\frac{1}{2} g\left(\|\mathbf{x}\|^2\right)\right] = \frac{1}{2} g'\left(\|\mathbf{x}\|^2\right) \cdot 2\mathbf{x} = f\left(\|\mathbf{x}\|^2\right)\ \mathbf{x} = \mathbf{F}(\mathbf{x}).$$

Se $\mathbf{F}$ não é identicamente nulo, seja $R > 0$ tal que $f(R) \neq 0$, $S = \left\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : \|\mathbf{x}\| = R\right\}$ e $\mathbf{n}$ a normal exterior unitária a S. Então

$$\int_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, dV_2 = \int_S f(R)R\, dV_2 = 4\pi R^3 f(R) \neq 0,$$

e portanto $\mathbf{F}$ não pode ser um rotacional.

(2 val.) **4.** Seja $M \subset \mathbb{R}^3$ uma variedade-3 com bordo compacta, $\mathbf{n} : M \to \mathbb{R}^3$ a normal exterior unitária e $\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ um campo vectorial de classe C^1 com divergência nula. Mostre que

$$\oint_{\partial M} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, dV_2 = 0$$

sem usar o Teorema da Divergência.

Resolução: Uma vez que $\nabla \cdot \mathbf{F} = 0$ e o domínio de $\mathbf{F}$ é $\mathbb{R}^3$, que é em estrela, sabemos que existe $\mathbf{A} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que

$$\mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{A}.$$

Seja C uma pequena curva fechada em ∂M (obtida, por exemplo, como imagem de uma pequena circunferência no domínio de alguma parametrização). Então C divide ∂M em duas variedades com bordo A e B tais que $A \cup B = \partial M$, $A \cap B = C$ e $\partial A = \partial B = C$. É fácil ver que as orientações induzidas em C pelas orientações de A e B determinadas por $\mathbf{n}$ são opostas; seja $+$ a orientação induzida em C pela orientação de A; então pelo Teorema de Stokes para campos vectoriais

$$\begin{aligned}\oint_{\partial M} \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\, dV_2 &= \int_A \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\, dV_2 + \int_B \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\, dV_2\\ &= \oint_{C^+} \mathbf{A}\cdot d\mathbf{g} - \oint_{C^+} \mathbf{A}\cdot d\mathbf{g} = 0.\end{aligned}$$

5. A *função de onda* correspondente ao estado fundamental de um electrão num átomo de hidrogénio é a função $\psi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ dada por

$$\psi(x,y,z) = Ae^{-\frac{r}{a}},$$

onde $r(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ é na função distância à origem, $a \in \mathbb{R}^+$ é o chamado *raio de Bohr* e $A \in \mathbb{R}^+$ é um factor de normalização.

(2 val.) (a) Mostre que $\psi \in L^2(\mathbb{R}^3)$, i.e., que $\psi^2 \in L^1(\mathbb{R}^3)$. Determine a constante $A \in \mathbb{R}^+$ de forma a que ψ^2 seja uma função densidade de probabilidade, i.e., de forma a que

$$\int_{\mathbb{R}^3} \psi^2 dV_3 = 1.$$

(2 val.) (b) Determine para que valores de $n \in \mathbb{Z}$ a função $r^n\psi^2$ é integrável em $\mathbb{R}^3$, e calcule o seu integral. Obtenha em particular o *valor médio da distância do electrão à origem*, $\langle r\rangle = \int_{\mathbb{R}^3} r\psi^2 dV_3$.

Resolução: Mudando para coordenadas esféricas, é fácil ver que

$$\int_{\mathbb{R}^3} \psi^2 dV_3 = 4\pi A^2 \int_0^{+\infty} r^2 e^{-\frac{2r}{a}} dr$$

onde cada um dos integrais acima existe *sse* o outro existe. Uma vez que a função $r^2e^{-\frac{r}{a}}$ é limitada em $]0,+\infty[$ e a função $e^{-\frac{r}{a}}$ é integrável neste intervalo, concluimos que ψ^2 é integrável em $\mathbb{R}^3$. Pondo $\lambda = \frac{2}{a}$, temos

$$\int_0^{+\infty} r^2 e^{-\lambda r} dr = \frac{d^2}{d\lambda^2}\int_0^{+\infty} e^{-\lambda r} dr = \frac{d^2}{d\lambda^2}\left(\frac{1}{\lambda}\right) = \frac{2}{\lambda^3}$$

(fica como exercício a verificação de que estamos nas condições de aplicação da Regra de Leibnitz). Concluimos portanto que para ψ^2 ser uma função densidade de probabilidade devemos ter

$$A = \sqrt{\frac{1}{\pi a^3}}.$$

Analogamente, a função $r^n\psi^2$ será integrável em $\mathbb{R}^3$ *sse* a função $r^{n+2}e^{-\frac{2r}{a}}$ for integrável em $]0,+\infty[$. Esta função é integrável em $[1,+\infty[$, uma vez que $r^{n+2}e^{-\frac{r}{a}}$ é limitada em $[1,+\infty[$ e a função $e^{-\frac{r}{a}}$ é integrável neste intervalo. Por outro lado,

$$\lim_{r\to 0} \frac{r^{n+2}e^{-\frac{2r}{a}}}{r^{n+2}} = 1,$$

e portanto $r^{n+2}e^{-\frac{2r}{a}}$ é integrável em $]0,1]$ *sse* r^{n+2} o fôr, isto é, *sse* $n+2>-1 \Leftrightarrow n > -3$. Além disso,

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^3} r^n \psi^2 dV_3 &= 4\pi A^2 \int_0^{+\infty} r^{n+2}e^{-\lambda r}dr = \frac{4}{a^3}(-1)^{n+2}\frac{d^{n+2}}{d\lambda^{n+2}}\int_0^{+\infty} e^{-\lambda r}dr \\ &= \frac{4}{a^3}(-1)^{n+2}\frac{d^{n+2}}{d\lambda^{n+2}}\left(\frac{1}{\lambda}\right) = \frac{4}{a^3}\frac{(n+2)!}{\lambda^{n+3}} = \frac{(n+2)!}{2^{n+1}}a^n\end{aligned}$$

(mais uma vez a verificação de que estamos nas condições de aplicação da Regra de Leibnitz fica como exercício). A título de confirmação, note-se que para $n=0$ obtemos de facto 1. Para $n=1$ obtemos $\langle r \rangle = \frac{3}{2}a$.

6. Recorde que o *produto cartesiano* de dois conjuntos A e B é o conjunto

$$A \times B = \{(a,b) : a \in A \text{ e } b \in B\}.$$

Recorde ainda que $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ se identifica naturalmente com $\mathbb{R}^{m+n}$.

Sejam $M \subset \mathbb{R}^m$ e $N \subset \mathbb{R}^n$ variedades diferenciáveis de dimensões k e l (respectivamente).

(2 val.) (a) Mostre que $M \times N \subset \mathbb{R}^{m+n}$ é uma variedade diferenciável de dimensão $k+l$, e que

$$T_{(\mathbf{x},\mathbf{y})}M \times N = \left\{(\mathbf{v},\mathbf{w}) \in \mathbb{R}^{m+n} : \mathbf{v} \in T_{\mathbf{x}}M \text{ e } \mathbf{w} \in T_{\mathbf{y}}N\right\}.$$

Resolução: Dado $(\mathbf{x},\mathbf{y}) \in M \times N$, sabemos que existe uma vizinhança aberta U_1 de $\mathbf{x}$ e uma parametrização $\mathbf{g}_1 : V_1 \subset \mathbb{R}^k \to M \cap U_1 \subset \mathbb{R}^m$ (i.e., uma aplicação C^1, injectiva, com inversa contínua, tal que $D\mathbf{g}_1$ tem característica máxima); analogamente, existe uma vizinhança aberta U_2 de $\mathbf{y}$ e uma parametrização $\mathbf{g}_2 : V_2 \subset \mathbb{R}^l \to M \cap U_2 \subset \mathbb{R}^n$. A aplicação $\mathbf{g} : V_1 \times V_2 \to (M \times N) \cap (U_1 \times U_2)$ dada por

$$\mathbf{g}(\mathbf{u},\mathbf{v}) = (\mathbf{g}_1(\mathbf{u}), \mathbf{g}_2(\mathbf{v}))$$

é então também C^1, injectiva e com inversa contínua. Além disso,

$$D\mathbf{g} = \begin{pmatrix} D\mathbf{g}_1 & 0 \\ 0 & D\mathbf{g}_2 \end{pmatrix},$$

e portanto possui característica máxima. Logo, $\mathbf{g}$ é uma parametrização. Como $(\mathbf{x},\mathbf{y})$ é arbitrário, $M \times N$ é uma variedade. Uma vez que as colunas de $D\mathbf{g}_1$, $D\mathbf{g}_2$ e $D\mathbf{g}$ formam bases para $T_{\mathbf{x}}M$, $T_{\mathbf{y}}N$ e $T_{(\mathbf{x},\mathbf{y})}M \times N$, respectivamente, a forma de $D\mathbf{g}$ torna evidente a segunda afirmação.

(2 val.) (b) Mostre que se M e N são orientáveis então $M \times N$ é orientável.

Resolução: Sejam $\mu \in \Omega^k(\mathbb{R}^m)$ e $\nu \in \Omega^l(\mathbb{R}^n)$ formas que orientam M e N, respectivamente. Isto é equivalente a dizer (na notação da resolução da alínea anterior) que $\mathbf{g}_1^*\mu$, $\mathbf{g}_2^*\nu$ não se anulam em nenhum ponto de V_1, V_2, quaisquer que sejam as parametrizações $\mathbf{g}_1 : V_1 \to M \cap U_1$, $\mathbf{g}_2 : V_2 \to M \cap U_2$. Podemos supor que $\mu \in \Omega^k(\mathbb{R}^{m+n})$ é uma forma-k que só depende das m primeiras funções coordenadas, e que $\nu \in \Omega^l(\mathbb{R}^{m+n})$ é uma forma-l que só depende das n últimas funções coordenadas. Então $\mu \wedge \nu \in \Omega^{k+l}(\mathbb{R}^{m+n})$. M pode ser coberta por parametrizações $\mathbf{g} : V_1 \times V_2 \subset \mathbb{R}^{k+l} \to M \cap (U_1 \times U_2)$ da forma $\mathbf{g}(\mathbf{u},\mathbf{v}) = (\mathbf{g}_1(\mathbf{u}), \mathbf{g}_2(\mathbf{v}))$. Para estas parametrizações,

$$\mathbf{g}^*(\mu \wedge \nu) = (\mathbf{g}^*\mu) \wedge (\mathbf{g}^*\nu) = (\mathbf{g}_1^*\mu) \wedge (\mathbf{g}_2^*\nu)$$

não se anula em nenhum ponto do seu domínio, e portanto $\mu \wedge \nu$ orienta $M \times N$.

(2 val.) (c) Mostre que se $M \times N$ é orientável então M e N são orientáveis. Indique uma variedade diferenciável não orientável de dimensão arbitrária $n \geq 2$.

Resolução: Seja $\mu \in \Omega^{k+l}(\mathbb{R}^{m+n})$ uma forma-$(k+l)$ que orienta $M \times N$. Fixamos $\mathbf{y}_0 \in N$ e uma base $\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_l$ para $T_{\mathbf{y}_0}N$. Sejam $\tilde{\mathbf{w}}_i = (\mathbf{0}, \mathbf{w}_i) \in \mathbb{R}^{m+n}$ para $i = 1, \ldots, l$. Dados k vectores $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k \in \mathbb{R}^m$, definimos também $\tilde{\mathbf{v}}_i = (\mathbf{v}_i, \mathbf{0}) \in \mathbb{R}^{m+n}$ para $i = 1, \ldots, k$. Finalmente, definimos $\nu \in \Omega^k(\mathbb{R}^m)$ através de

$$\nu(\mathbf{x})(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k) = \mu(\mathbf{x}, \mathbf{y}_0)(\tilde{\mathbf{v}}_1, \ldots, \tilde{\mathbf{v}}_k, \tilde{\mathbf{w}}_1, \ldots, \tilde{\mathbf{w}}_l).$$

Note-se que se $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k$ formam uma base para $T_{\mathbf{x}}M$ então $\tilde{\mathbf{v}}_1, \ldots, \tilde{\mathbf{v}}_k, \tilde{\mathbf{w}}_1, \ldots, \tilde{\mathbf{w}}_l$ formam uma base para $T_{(\mathbf{x},\mathbf{y}_0)}M \times N$, e portanto

$$\mu(\mathbf{x}, \mathbf{y}_0)(\tilde{\mathbf{v}}_1, \ldots, \tilde{\mathbf{v}}_k, \tilde{\mathbf{w}}_1, \ldots, \tilde{\mathbf{w}}_l) \neq 0 \Rightarrow \nu(\mathbf{x})(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k) \neq 0,$$

i.e., ν orienta M. O argumento para N é, claro está, perfeitamente análogo. Finalmente, se $M \subset \mathbb{R}^3$ é a banda de Möbius, a variedade de dimensão $n \geq 2$ dada por $M \times \mathbb{R}^{n-2} \subset \mathbb{R}^{n+1}$ é não orientável.