Análise Matemática III - Turma Especial

Ficha Extra 2 - Corpo Rígido

Não precisam de entregar esta ficha

1. O espaço vectorial $M_3(\mathbb{R})$ das matrizes 3×3 de entradas reais pode ser identificado com $\mathbb{R}^9$ de forma natural. Considere o subconjunto de $\mathbb{R}^9$

$$SO(3) = \{A \in M_3(\mathbb{R}) : A^t A = I \text{ e } \det A = 1\}$$

formado pelas matrizes 3×3 ortogonais de determinante 1. Recorde que estas são exactamente as rotações (i.e, as isometrias de $\mathbb{R}^3$ que preservam orientações).

   (a) Mostre que $SO(3)$ é uma variedade de dimensão 3 e classe C^∞ compacta[1].

   (b) Recorde que um *grupo* $(G, \cdot)$ é um conjunto G munido de uma operação binária $\cdot$ que é associativa, possui elemento neutro e é tal que todos os elementos possuem inverso. Mostre que $SO(3)$ com a operação produto de matrizes é um grupo não comutativo. Portanto $SO(3)$ é uma variedade com estrutura de grupo (*grupo de Lie*).

   (c) Mostre que $T_I SO(3) = \{A \in M_3(\mathbb{R}) : A^t + A = 0\}$. Este espaço tangente diz-se a *álgebra de Lie* de $SO(3)$, e representa-se por $\mathfrak{so}(3)$.

   (d) Mostre que existe um isomorfismo vectorial $\boldsymbol{\Omega} : \mathfrak{so}(3) \to \mathbb{R}^3$ tal que

$$A\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{\Omega}(A) \times \boldsymbol{\xi}$$

   para todo o $\boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^3$ e $A \in \mathfrak{so}(3)$, onde $\times$ designa o produto externo.

2. Um *corpo rígido com um ponto fixo*[2] pode ser descrito da seguinte forma: fixamos um conjunto mensurável à Jordan C (*configuração de referência*) e uma função integrável à Riemann $\rho : C \to \mathbb{R}^+$ (*função densidade de massa*). O movimento do corpo é dado por um caminho diferenciável $S : \mathbb{R} \to SO(3)$, de forma que cada ponto $\boldsymbol{\xi} \in C$ descreve um caminho $\mathbf{x} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ dado por $\mathbf{x}(t) = S(t)\boldsymbol{\xi}$.

   (a) Mostre que

$$\dot{S}(t) = S(t)A(t)$$

   onde $A(t) \in \mathfrak{so}(3)$.

[1] Uma variedade diz-se compacta se é um subconjunto compacto de $\mathbb{R}^n$.

[2] A restrição de existir um ponto fixo não é importante, uma vez que o movimento de um corpo rígido pode sempre ser decomposto num movimento de translacção do centro de massa e um movimento de rotação em torno do centro de massa.

(b) Se $S \in SO(3)$ então $S(\boldsymbol{\alpha} \times \boldsymbol{\beta}) = (S\boldsymbol{\alpha}) \times (S\boldsymbol{\beta})$. Use este facto para mostrar que a velocidade do ponto $\boldsymbol{\xi} \in C$ é dada por

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \boldsymbol{\omega}(t) \times \mathbf{x}(t)$$

onde

$$\boldsymbol{\omega}(t) = S(t)\boldsymbol{\Omega}(t)$$

e

$$\boldsymbol{\Omega}(t) = \boldsymbol{\Omega}(A(t))$$

($\boldsymbol{\omega}$ diz-se a *velocidade angular instantânea* do corpo rígido; $\boldsymbol{\Omega}$ diz-se a *velocidade angular instantânea na configuração de referência*).

(c) O *momento angular* do corpo rígido é

$$\mathbf{p}(t) = \int_C \left[(S(t)\boldsymbol{\xi}) \times (\dot{S}(t)\boldsymbol{\xi})\right] \rho(\boldsymbol{\xi}) dV_3(\boldsymbol{\xi}).$$

Mostre que

$$\mathbf{p}(t) = S(t)\mathbf{P}(t)$$

onde

$$\mathbf{P}(t) = \int_C [\boldsymbol{\xi} \times (\boldsymbol{\Omega}(t) \times \boldsymbol{\xi})]\rho(\boldsymbol{\xi}) dV_3(\boldsymbol{\xi}).$$

(d) O *tensor de inércia* do corpo rígido é o operador $I : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dado por

$$I(\mathbf{v}) = \int_C [\boldsymbol{\xi} \times (\mathbf{v} \times \boldsymbol{\xi})]\rho(\boldsymbol{\xi}) dV_3(\boldsymbol{\xi})$$

(portanto $\mathbf{P} = I\boldsymbol{\Omega}$). Mostre que na base canónica o tensor de inércia admite a representação matricial

$$I = \begin{pmatrix} \int_C \rho(y^2 + z^2) & -\int_C \rho xy & -\int_C \rho xz \\ -\int_C \rho xy & \int_C \rho(x^2 + z^2) & -\int_C \rho yz \\ -\int_C \rho xz & -\int_C \rho yz & \int_C \rho(x^2 + y^2) \end{pmatrix}$$

Portanto o operador de inércia é simétrico. Conclua que existe uma base ortonormada $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ de $\mathbb{R}^3$ na qual I admite a representação $I = \mathrm{diag}(I_1, I_2, I_3)$. Os eixos $\mathbb{R}\mathbf{e}_1, \mathbb{R}\mathbf{e}_2, \mathbb{R}\mathbf{e}_3$ dizem-se os *eixos principais de inércia* e os valores próprios I_1, I_2, I_3 os *momentos principais de inércia* do corpo rígido. Qual a expressão dos momentos principais de inércia na base dos eixos principais de inércia? Mostre que $I_1 < I_2 + I_3$ (e desigualdades semelhantes para I_2, I_3; portanto os momentos principais de inércia satisfazem as mesmas desigualdades que os comprimentos dos lados de um triângulo).

(e) Mostre que cada uma das condições de simetria seguintes garante que o eixo dos zz é um eixo principal de inércia:

i. *Simetria em relação ao eixo dos zz:*
$(x, y, z) \in C$ *sse* $(-x, -y, z) \in C$ e $\rho(x, y, z) = \rho(-x, -y, z)$.

ii. *Simetria em relação ao plano $z = 0$:*
$(x, y, z) \in C$ *sse* $(x, y, -z) \in C$ e $\rho(x, y, z) = \rho(x, y, -z)$.

(f) Se o momento das forças exteriores é nulo, o vector momento angular é constante. Mostre que nesse caso valem as *equações de Euler*

$$\dot{\mathbf{P}} = \mathbf{P} \times \boldsymbol{\Omega}.$$

Mostre que as quantidades

$$K = \frac{1}{2}\langle \mathbf{P}, \boldsymbol{\Omega} \rangle$$

e

$$\mathbf{P}^2 = \langle \mathbf{P}, \mathbf{P} \rangle$$

são conservadas ao longo das soluções destas equações, onde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ designa o produto interno Euclidiano.

(g) Escreva as equações de Euler e as quantidades conservadas na base dos eixos principais de inércia. Mostre que as equações de Euler admitem como soluções rotações em torno de cada um dos eixos principais de inércia com velocidade angular constante. Mostre ainda que se $I_1 < I_2 < I_3$ as rotações em torno de $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3$ são estáveis, enquanto que a rotação em torno de $\mathbf{e}_2$ é instável. (**Sugestão:** *Note que as soluções das equações de Euler descrevem curvas em $\mathbb{R}^3$ que são a intersecção de esferas com elipsóides*).