Análise Matemática III - Turma Especial

Ficha 6

A entregar até à aula prática de sexta-feira dia 31 de Outubro

1. Calcule o volume, o centróide e o momento de inércia em relação ao eixo dos zz (em função da massa total M) dos sólidos homogéneos seguintes:

   (a) $\left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2 \leq r^2 \text{ e } z \in [0,h]\right\}$, com $r,h>0$;

   (b) $\left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq rz \leq h(r-\sqrt{x^2+y^2})\right\}$, com $r,h>0$;

   (c) $\left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2} \leq 1\right\}$, com $a,b,c>0$.

2. Os *versores das coordenadas polares* são os campos vectoriais definidos em cada ponto $(x,y)=(r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{\mathbf{0}\}$ por

$$\mathbf{e}_r = (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta);$$
$$\mathbf{e}_\theta = \frac{d\mathbf{e}_r}{d\theta} = (-\operatorname{sen}\theta, \cos\theta).$$

   Deste modo, a expressão da transformação de coordenadas $(x,y)=\mathbf{g}(r,\theta)$ é

$$(x,y) \equiv \mathbf{x} = r\mathbf{e}_r.$$

   (a) Mostre que se $\mathbf{x}=\mathbf{x}(t)$ é um caminho duas vezes diferenciável representando a trajectória de uma partícula em $\mathbb{R}^2 \setminus \{\mathbf{0}\}$ se tem

$$\ddot{\mathbf{x}} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\mathbf{e}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\mathbf{e}_\theta$$

   (b) Supondo $\dot{\theta} > 0$, mostre que a área varrida pelo vector $\mathbf{x}(t)$ entre os instantes t_0 e t é

$$A(t) = \int_{t_0}^{t} \frac{1}{2} r^2(s)\dot{\theta}(s)ds.$$

   (c) Prove a *Segunda Lei de Kepler:* se $\ddot{\mathbf{x}}$ é *radial* (i.e., se $\ddot{\mathbf{x}}(t)=a(t)\mathbf{e}_r(t)$) então $\dot{A}$ é constante.

3. Seja $I \subset \mathbb{R}^n$ um intervalo compacto e $f : I \times]a,b[\to \mathbb{R}$ contínua. Mostre que $F :]a,b[\to \mathbb{R}$ dada por

$$F(t) = \int_I f(\mathbf{x},t)dV_n(\mathbf{x})$$

   é contínua.

4. Use a Regra de Leibnitz para provar o Lema de Schwarz.

Não precisam de entregar:

5. Seja $A \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto mensurável à Jordan. Mostre que $\operatorname{int}(A)$ e $\overline{A}$ são também mensuráveis à Jordan, e que

$$V_n(\operatorname{int}(A)) = V_n(\overline{A}) = V_n(A).$$