Análise Matemática III - Turma Especial

Ficha 13

Não precisam de entregar esta ficha

1. Dê um exemplo de uma sucessão de funções $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ tais que
$$\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = 0$$
para todo o $x \in [0,1]$ mas
$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 f_n(x)dx = 1.$$
Verifique que as hipóteses do Teorema da Convergência Monótona/Dominada não são satisfeitas.

2. Usando
$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$$
e a Regra de Leibnitz calcule
$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^{2n} e^{-x^2} dx$$
para todo o $n \in \mathbb{N}$.

3. Seja $A \subset \mathbb{R}^n$ aberto, $f : A \to \mathbb{R}$ contínua q.t.p. em A e limitada em cada compacto contido em A. Seja $\mathcal{O}$ uma cobertura admissível de A e Φ uma partição da unidade para A subordinada a $\mathcal{O}$. Recorde que se diz que f é *integrável à Riemann no sentido generalizado* em A se a série de termos não negativos
$$\sum_{\varphi\in\Phi} \int_A \varphi|f|$$
converge, e que se f é integrável, o seu *integral* é a soma da série absolutamente convergente
$$\int_A f = \sum_{\varphi\in\Phi} \int_A \varphi f.$$
Use o Teorema da Convergência Monótona para mostrar que se f é integrável neste sentido generalizado então $f \in L^1(A)$, e o Teorema da Convergência Dominada para mostrar que o integral definido desta forma coincide com o integral de Lebesgue de f.

4. Seja $A \subset \mathbb{R}^n$ um aberto, $\mathcal{O}$ uma cobertura admissível de A, Φ uma partição da unidade subordinada a $\mathcal{O}$, $f : A \to \mathbb{R}$ uma função integrável à Riemann no sentido generalizado, $\mathbf{g} : A \to \mathbb{R}^n$ uma aplicação injectiva de classe C^1 e
$$B = \{\mathbf{x} \in A : J\mathbf{g}(\mathbf{x}) = 0\}.$$
Recorde que, pelo teorema de Sard, $D = \mathbf{g}(B)$ tem medida nula.

(a) Mostre que se $B = \varnothing$ então $C = \mathbf{g}(A)$ é aberto. Na realidade é possível mostrar que C é aberto mesmo quando $B \neq \varnothing$ (ou mesmo quando $\mathbf{g}$ é apenas contínua - *Teorema de Invariância do Domínio*).

(b) Mostre que $A \setminus B$ e $C \setminus D$ são abertos.

(c) Use o Teorema de Mudança de Variáveis (que sabemos ser válido apenas quando $B = \varnothing$) para mostrar que

$$\int_C f = \int_A (f \circ \mathbf{g})|J\mathbf{g}|$$

no caso geral.