

# Análise Matemática III - Turma Especial

## Ficha 13

*Não precisam de entregar esta ficha*

1. Dê um exemplo de uma sucessão de funções  $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  tais que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = 0$$

para todo o  $x \in [0, 1]$  mas

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 f_n(x) dx = 1.$$

Verifique que as hipóteses do Teorema da Convergência Monótona/Dominada não são satisfeitas.

2. Usando

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$$

e a Regra de Leibnitz calcule

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^{2n} e^{-x^2} dx$$

para todo o  $n \in \mathbb{N}$ .

3. Seja  $A \subset \mathbb{R}^n$  aberto,  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  contínua q.t.p. em  $A$  e limitada em cada compacto contido em  $A$ . Seja  $\mathcal{O}$  uma cobertura admissível de  $A$  e  $\Phi$  uma partição da unidade para  $A$  subordinada a  $\mathcal{O}$ . Recorde que se diz que  $f$  é *integrável à Riemann no sentido generalizado* em  $A$  se a série de termos não negativos

$$\sum_{\varphi \in \Phi} \int_A \varphi |f|$$

converge, e que se  $f$  é integrável, o seu *integral* é a soma da série absolutamente convergente

$$\int_A f = \sum_{\varphi \in \Phi} \int_A \varphi f.$$

Use o Teorema da Convergência Monótona para mostrar que se  $f$  é integrável neste sentido generalizado então  $f \in L^1(A)$ , e o Teorema da Convergência Dominada para mostrar que o integral definido desta forma coincide com o integral de Lebesgue de  $f$ .

4. Seja  $A \subset \mathbb{R}^n$  um aberto,  $\mathcal{O}$  uma cobertura admissível de  $A$ ,  $\Phi$  uma partição da unidade subordinada a  $\mathcal{O}$ ,  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  uma função integrável à Riemann no sentido generalizado,  $\mathbf{g} : A \rightarrow \mathbb{R}^n$  uma aplicação injetiva de classe  $C^1$  e

$$B = \{\mathbf{x} \in A : J\mathbf{g}(\mathbf{x}) = 0\}.$$

Recorde que, pelo teorema de Sard,  $D = \mathbf{g}(B)$  tem medida nula.

(a) Mostre que se  $B = \emptyset$  então  $C = \mathbf{g}(A)$  é aberto. Na realidade é possível mostrar que  $C$  é aberto mesmo quando  $B \neq \emptyset$  (ou mesmo quando  $\mathbf{g}$  é apenas contínua - *Teorema de Invariância do Domínio*).

(b) Mostre que  $A \setminus B$  e  $C \setminus D$  são abertos.

(c) Use o Teorema de Mudança de Variáveis (que sabemos ser válido apenas quando  $B = \emptyset$ ) para mostrar que

$$\int_C f = \int_A (f \circ \mathbf{g}) |J\mathbf{g}|$$

no caso geral.