Análise Matemática III - Turma Especial

Ficha 12

A entregar até à aula prática de sexta-feira dia 12 de Dezembro

1. Uma relação $\sim$ num conjunto A diz-se uma *relação de equivalência* se é

   (i) *Reflexiva:* $a \sim a$ para todo o $a \in A$;

   (ii) *Simétrica:* $a \sim b \Rightarrow b \sim a$ para todo o $a, b \in A$;

   (iii) *Transitiva:* $a \sim b$ e $b \sim c \Rightarrow a \sim c$ para todo o $a, b, c \in A$.

   Uma relação de equivalência $\sim$ em A subdivide A em subconjuntos disjuntos, ditos *classes de equivalência*, onde a classe de equivalência de $a \in A$ é

   $$[a] = \{b \in A : b \sim a\}.$$

   Se $b \in [a]$, diz-se que b é um *representante* de $[a]$. Considere a seguinte relação em $\mathbb{R}$:

   $$x \sim y \Leftrightarrow x - y \in \mathbb{Q}.$$

   (a) Mostre que $\sim$ é uma relação de equivalência. Portanto $\sim$ subdivide $\mathbb{R}$ em classes de equivalência[1] (todas elas densas em $\mathbb{R}$).

   (b) O *conjunto de Sierpinski* S é construido tomando exactamente um representante de cada classe de equivalência em $[0, 1]$. Se $\{q_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é uma enumeração de $[-1, 1] \cap \mathbb{Q}$, definimos $S_n = q_n + S$. Mostre que

   $$[0, 1] \subset \bigcup_{n=1}^{+\infty} S_n \subset [-1, 2].$$

   (c) Mostre que o conjunto de Sierpinski não é mensurável.

   (d) Mostre que não existe nenhuma função $\mu : \mathcal{P}(\mathbb{R}) \to [0, +\infty]$ (onde $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ designa a família de todos os subconjuntos de $\mathbb{R}$) que seja

      (i) σ-aditiva;

      (ii) Invariante por translacções (i.e., $\mu(x + A) = \mu(A)$ para todo o $x \in \mathbb{R}$ e $A \subset \mathbb{R}$);

      (iii) Normalizada (i.e., $\mu([a, b]) = b - a$ para todo o $a, b \in \mathbb{R}$).

      Pode provar-se que os conjuntos mensuráveis à Lebesgue formam a maior σ-álgebra onde é possível definir uma função com estas propriedades.

[1] Outra maneira de pensar nisto é a seguinte: $\mathbb{R}$ é um espaço vectorial (de dimensão infinita) sobre $\mathbb{Q}$, e $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ é um subespaço de dimensão 1 (uma recta racional que contém a origem). As classes de equivalência são então as rectas racionais $x + \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ paralelas a $\mathbb{Q}$.

2. Decida se as funções seguintes são ou não integráveis nos seus domínios, e calcule os respectivos integrais caso existam:

   (a) $f(x) = \dfrac{1}{\cosh x}$;

   (b) $g(x) = \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$;

   (c) $h(x,y) = \dfrac{e^{-x^2-y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

   (**Sugestão:** *Recorde que* f *é integrável* sse $|f|$ *é integrável*).

3. A *função Gama* é definida pela fórmula

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}dt.$$

   (a) Mostre que esta função está bem definida para $x > 0$.

   (b) Mostre que

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$$

   e que

$$\Gamma(1) = 1.$$

   Conclua que

$$\Gamma(n+1) = n!$$

   para todo o $n \in \mathbb{N}$ (portanto a função gama pode ser vista como uma generalização da noção de factorial).

   (c) Use $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}dx = \sqrt{\pi}$ para mostrar que $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$.

   (d) Usando coordenadas Cartesianas e coordenadas esféricas, mostre que

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\|\mathbf{x}\|^2}dV_n = \pi^{\frac{n}{2}} = V_{n-1}(S^{n-1})\int_0^{+\infty} e^{-r^2}r^{n-1}dr,$$

   onde

$$S^{n-1} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \|\mathbf{x}\| = 1\}.$$

   Conclua que

$$V_{n-1}(S^{n-1}) = \frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}.$$

   (e) Use o Teorema da Divergência para mostrar que

$$V_n(B^n) = \frac{1}{n}V_{n-1}(S^{n-1}),$$

   onde

$$B^n = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \|\mathbf{x}\| < 1\}.$$

   Conclua que

$$V_n(B^n) = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)}.$$

(f) Seja

$$f(t) = x \log t - t$$

o logaritmo da função integranda na expressão de $\Gamma(x+1)$. Mostre que para $x > 0$ esta função tem um máximo para $t = x$, e que a sua expansão em série de Taylor em torno deste ponto é

$$f(t) = x \log x - x - \frac{(t-x)^2}{2x} + \dots$$

Mostre que aproximando f pela sua expansão até à segunda ordem se obtém a fórmula aproximada

$$\Gamma(x+1) \simeq \left(\frac{x}{e}\right)^x \int_{-x}^{+\infty} e^{-\frac{u^2}{2x}} du \simeq \left(\frac{x}{e}\right)^x \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{u^2}{2x}} du = \sqrt{2\pi x}\left(\frac{x}{e}\right)^x,$$

que é válida para $x >> 1$. Esta expansão assimptótica é exactamente a conhecida *fórmula de Stirling* para o factorial de um número inteiro:

$$n! \simeq \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n \qquad (n >> 1).$$

Não precisam de entregar:

4. A partir das ideias usadas na construção do conjunto de Sierpinski, mostre que é possível decompor um conjunto $B \subset [-1, 2]$ numa união numerável de conjuntos disjuntos (não mensuráveis) S_n tais que

$$\bigcup_{n=1}^{+\infty} (p_n + S_n) = \mathbb{R}$$

para certos $p_n \in \mathbb{R}$ [2].

[2] Esta é uma versão fraca do famoso *paradoxo de Banach-Tarski*, o qual garante que é possível decompor uma bola $B \subset \mathbb{R}^3$ em seis subconjuntos disjuntos que podem ser reunidos através de movimentos rígidos de modo a formar duas bolas disjuntas com o mesmo raio de B.