Análise Matemática III - Turma Especial

Ficha 11

A entregar até à aula prática de sexta-feira dia 5 de Dezembro

1. Neste exercício não pode usar formas diferenciais. Um aberto limitado $E \subset \mathbb{R}^n$ diz-se uma *região elementar* se existem abertos $U_i \subset \mathbb{R}^{n-1}$ e funções de classe C^1 $\Phi_i^{\pm} : U_i \to \mathbb{R}$ tais que U_i é a projecção de E no plano $x^i = 0$ e os pontos do conjunto E são exactamente os pontos que satisfazem

$$\Phi_i^-(x^1, \ldots, x^{i-1}, x^{i+1}, \ldots, x^n) < x^i < \Phi_i^+(x^1, \ldots, x^{i-1}, x^{i+1}, \ldots, x^n)$$

para todo o $i = 1, \ldots, n$.

   (a) Prove o Teorema de Green para regiões elementares $E \subset \mathbb{R}^2$. (**Sugestão:** *Decomponha o campo vectorial numa soma de campos com todas as componentes nulas excepto uma*).

   (b) Mostre que o Teorema de Green é equivalente ao Teorema da Divergência em $\mathbb{R}^2$.

   (c) Prove o Teorema da Divergência para regiões elementares $E \subset \mathbb{R}^3$. (**Sugestão:** *Decomponha o campo vectorial numa soma de campos com todas as componentes nulas excepto uma*).

   (d) Usando o Teorema de Green, prove o Teorema de Stokes para campos vectoriais em variedades-2 que são gráficos de funções $z = f(x, y)$ definidas em regiões elementares $E \subset \mathbb{R}^2$.

2. Sejam $U, V \subset \mathbb{R}^n$ abertos. Recorde que uma aplicação $\mathbf{g} : U \to V$ se diz um *difeomorfismo* se é bijectiva, diferenciável e com inversa diferenciável. U e V dizem-se C^q*-difeomorfos* se existe um difeomorfismo $\mathbf{g} : U \to V$ de classe C^q.

   (a) Mostre que se U, V são C^1-difeomorfos então $\omega \in \Omega^k(V)$ é fechada/exacta *sse* $\mathbf{g}^*\omega \in \Omega^k(U)$ é fechada/exacta.

   (b) Mostre que $\mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$ não é difeomorfo a $\mathbb{R}^n$. (**Sugestão:** *Considere a forma* $\Omega_{\mathbf{F}}$, *onde* $\mathbf{F} : \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\} \to \mathbb{R}^n$ *é um campo vectorial da forma*

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|^d}$$

   para $d \in \mathbb{R}$ *conveniente*).

3. Seja $\mathbf{g} : \mathbb{R}^+ \times]0,\pi[\times]0,2\pi[\to \mathbb{R}^3$ a habitual transformação de coordenadas associada às coordenadas esféricas,

$$\mathbf{g}(r,\theta,\varphi) = (r\operatorname{sen}\theta\cos\varphi, r\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\varphi, r\cos\theta).$$

   (a) Verifique que

$$(g_{ij}) = (\partial_i\mathbf{g}\cdot\partial_j\mathbf{g}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & r^2\operatorname{sen}^2\theta \end{pmatrix}.$$

   Portanto $\{\partial_r\mathbf{g}, \partial_\theta\mathbf{g}, \partial_\varphi\mathbf{g}\}$ é uma base ortogonal.

   (b) Verifique que

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_r &= \partial_r\mathbf{g} \sim dr \sim r^2\operatorname{sen}\theta d\theta\wedge d\varphi \\ \mathbf{e}_\theta &= \frac{1}{r}\partial_\theta\mathbf{g} \sim rd\theta \sim r\operatorname{sen}\theta d\varphi\wedge dr \\ \mathbf{e}_\varphi &= \frac{1}{r\operatorname{sen}\theta}\partial_\varphi\mathbf{g} \sim r\operatorname{sen}\theta d\varphi \sim rdr\wedge d\theta \end{aligned}$$

   e que

$$dV_3 = r^2\operatorname{sen}\theta dr\wedge d\theta\wedge d\varphi.$$

   (c) Escreva o *Laplaciano* da função f, $\nabla^2 f = \nabla\cdot\nabla f$, em coordenadas esféricas.

   (d) Determine todas a soluções da *equação de Laplace*, $\nabla^2 f = 0$, que só dependem da coordenada radial r.

   (e) O campo eléctrico gerado por uma carga pontual é da forma $\mathbf{E} = E(r,\theta,\varphi)\mathbf{e}_r$, e deve satisfazer as equações de Maxwell no vácuo, $\nabla\times\mathbf{E} = \mathbf{0}$ e $\nabla\cdot\mathbf{E} = 0$. Determine a expressão geral de $E(r,\theta,\varphi)$.

   (f) O campo de velocidades de um fluido é da forma $\mathbf{u} = u(r,\theta,\varphi)\mathbf{e}_\theta$, e deve satisfazer as equações $\nabla\times\mathbf{u} = \mathbf{0}$ e $\nabla\cdot\mathbf{u} = 0$. Determine a expressão geral de $u(r,\theta,\varphi)$.

Não precisam de entregar:

4. Seja $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0),(0,1)\}$. Indique todos os valores possíveis de $\oint_C \omega$, onde

$$\omega = \left(-\frac{3y}{x^2+y^2} + \frac{5(y-1)}{x^2+(y-1)^2}\right)dx + \left(\frac{3x}{x^2+y^2} - \frac{5x}{x^2+(y-1)^2}\right)dy \in \Omega^1(U)$$

   e $C\subset U$ é uma variedade-1 compacta.

5. Dado um campo eléctrico $\mathbf{E} = E^1\mathbf{e}_1 + E^2\mathbf{e}_2 + E^3\mathbf{e}_3$ e um campo magnético $\mathbf{B} = B^1\mathbf{e}_1 + B^2\mathbf{e}_2 + B^3\mathbf{e}_3$ dependentes do tempo t, define-se em $\mathbb{R}^4$ com coordenadas (t,x,y,z) a forma-2

$$F = E^1dx\wedge dt + E^2dy\wedge dt + E^3dz\wedge dt + B^1dy\wedge dz + B^2dz\wedge dx + B^3dx\wedge dy$$

   (dita o *tensor de Faraday*). Mostre que F é fechada *sse* $\mathbf{E}$ e $\mathbf{B}$ satisfazem as *equações de Maxwell homogéneas* $\nabla\cdot\mathbf{B} = 0$, $\nabla\times\mathbf{E} = -\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}$.

6. Este exercício destina-se a provar o *Teorema da Esfera Penteada:* Se U é uma vizinhança aberta de

$$S^2 = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : \|\mathbf{x}\| = 1\}$$

e $\mathbf{F} : U \to \mathbb{R}^3$ é um campo vectorial de classe C^1 *tangente* a S^2, i.e., tal que $\mathbf{F}(\mathbf{x}) \in T_{\mathbf{x}}S^2$ para todo o $\mathbf{x} \in S^2$, então existe $\mathbf{x}_0 \in S^2$ tal que $\mathbf{F}(\mathbf{x}_0) = \mathbf{0}$.

(a) Suponha que o teorema era falso. Justifique que nesse caso existiria um campo vectorial $\mathbf{G}$ tangente a S^2 tal que $\|\mathbf{G}(\mathbf{x})\| = 1$ para todo o $\mathbf{x} \in S^2$.

(b) Seja $\mathbf{g} : \mathbb{R}^2 \to S^2$ a habitual função

$$\mathbf{g}(\theta, \varphi) = (\operatorname{sen}\theta \cos\varphi, \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\varphi, \cos\theta)$$

cujas restrições são parametrizações de S^2. Considere a função $\mathbf{H} : \mathbb{R}^3 \to S^2$ dada por

$$\mathbf{H}(t, \theta, \varphi) = \cos(t)\mathbf{g}(\theta, \varphi) + \operatorname{sen}(t)\mathbf{G}(\mathbf{g}(\theta, \varphi)),$$

e a forma de volume $\Omega_{\mathbf{E}}$ para S^2, onde

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi} \frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|^3}.$$

Recorde que $d\Omega_{\mathbf{E}} = 0$ em $\mathbb{R}^3 \setminus \{\mathbf{0}\}$. Considere a forma-2

$$\omega = \mathbf{H}^*\Omega_{\mathbf{E}}$$

e a variedade com bordo $[0, \pi] \times [0, \pi] \times [0, 2\pi] \subset \mathbb{R}^3$. Use o Teorema de Stokes nesta variedade para mostrar que

$$\int_{\{0\}\times]0,\pi[\times]0,2\pi[^+} \omega = \int_{\{\pi\}\times]0,\pi[\times]0,2\pi[^+} \omega,$$

onde $+$ é a orientação induzida por $d\theta \wedge d\varphi$.

(c) Use a alínea anterior e os factos de $\mathbf{H}(0, \theta, \varphi) = \mathbf{g}(\theta, \varphi)$ e $\mathbf{H}(\pi, \theta, \varphi) = -\mathbf{g}(\theta, \varphi)$ para obter uma contradição.