Análise Matemática III - Turma Especial

Ficha 1

A entregar até à aula prática de sexta-feira dia 26 de Setembro

1. Sejam $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ e $\mathbf{g} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ funções diferenciáveis.

   (a) Mostre que a derivada de $f \circ \mathbf{g}$ é a derivada direccional de f segundo $\frac{d\mathbf{g}}{dt}$.

   (b) Suponha que o caminho $\mathbf{g}$ é percorrido com velocidade unitária, $\left\| \frac{d\mathbf{g}}{dt} \right\| = 1$, e satisfaz $\mathbf{g}(0) = \mathbf{x}_0$. Mostre que
   $$\left| \frac{d(f \circ \mathbf{g})}{dt}(0) \right| \leq \|\nabla f(\mathbf{x}_0)\|.$$
   Mostre ainda que se $\nabla f(\mathbf{x}_0) \neq \mathbf{0}$ se tem
   $$\frac{d(f \circ \mathbf{g})}{dt}(0) = \|\nabla f(\mathbf{x}_0)\|$$
   exactamente quando
   $$\frac{d\mathbf{g}}{dt}(0) = \frac{\nabla f(\mathbf{x}_0)}{\|\nabla f(\mathbf{x}_0)\|}$$
   (por outras palavras, o gradiente indica a direcção de crescimento máximo da função).

   (c) Um vector $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ diz-se *tangente* a um conjunto $S \subset \mathbb{R}^n$ no ponto $\mathbf{x}_0 \in S$ se existe um caminho $\mathbf{g} : \mathbb{R} \to S$ tal que $\mathbf{g}(0) = \mathbf{x}_0$ e $\frac{d\mathbf{g}}{dt}(0) = \mathbf{v}$. Um vector diz-se *ortogonal* a um conjunto $S \subset \mathbb{R}^n$ no ponto $\mathbf{x}_0 \in S$ se é ortogonal a todos os vectores tangentes a S no ponto $\mathbf{x}_0$. Mostre que $\nabla f(\mathbf{x}_0)$ é ortogonal ao conjunto de nível
   $$S = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}_0)\}$$
   no ponto $\mathbf{x}_0$.

2. (a) Uma função $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ diz-se *homogénea de grau* m se $f(t\mathbf{x}) = t^m f(\mathbf{x})$ para todo o $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ e $t > 0$. Mostre que se f é diferenciável então
   $$\sum_{i=1}^{n} x^i \partial_i f(\mathbf{x}) = m f(\mathbf{x})$$
   (*Teorema de Euler*).

   (b) O *problema dos* N *corpos* consiste no cálculo das trajectórias de N partículas pontuais de massas $m_1, \ldots, m_N > 0$ e posições $\mathbf{x}_1 \equiv (x_1, y_1, z_1), \ldots, \mathbf{x}_N \equiv (x_N, y_N, z_N) \in \mathbb{R}^3$ sob a acção das atracções gravitacionais mútuas. Definindo $r_{ij} = \|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j\|$ e
   $$U = \sum_{i<j} \frac{m_i m_j}{r_{ij}}$$

é possível escrever as equações diferenciais do movimento na forma

$$\ddot{q}_i = \frac{\partial U}{\partial q_i}$$

onde $q = x, y, z$ e $i = 1, \ldots, N$. Use o resultado do exercício anterior para mostrar que o problema dos N corpos não possui soluções de equilíbrio, i.e., soluções para as quais todas as coordenadas q_i são constantes.

3. Mostre que uma função $\mathbf{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ é contínua *sse* a imagem inversa[1] de qualquer aberto é um aberto.

   Não precisam de entregar:

4. Seja X um espaço vectorial normado. Uma sucessão $x_n \in X$ diz-se uma *sucessão de Cauchy* se para todo o $\varepsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para $m, n > N$ se tem $\|x_n - x_m\| < \varepsilon$. X diz-se *completo* se qualquer sucessão de Cauchy converge.

   (a) Sabendo que $\mathbb{R}$ é completo, mostre que $\mathbb{R}^n$ é completo.

   (b) Dê um exemplo de um espaço normado que não seja completo.

   (c) Mostre que se X é completo qualquer série absolutamente convergente converge.

   (d) Mostre que se X é completo qualquer contracção $F : X \to X$ tem um e um só ponto fixo.

   (e) Seja X o espaço vectorial das funções contínuas no intervalo $[0, \alpha]$ com a norma

   $$\|x\|_\infty = \sup_{t \in [0,\alpha]} |x(t)|.$$

   É possível mostrar que X é completo. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função *Lipschitziana*, i.e., para a qual existe $M > 0$ tal que

   $$|f(x) - f(y)| \leq M|x - y|.$$

   Definimos a aplicação $F : X \to X$ mediante

   $$F(x)(t) = x_0 + \int_0^t f(x(s))ds$$

   com $x_0 \in \mathbb{R}$. Mostre F é uma contracção para $\alpha > 0$ suficientemente pequeno.

   (f) Use a alínea anterior para mostrar que se f é Lipschitziana o *problema de Cauchy*

   $$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t)) \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

   possui solução única de classe C^1 num intervalo $[0, \alpha]$ para $\alpha > 0$ suficientemente pequeno.

[1] A imagem inversa de um conjunto $C \subset B$ pela função $f : A \to B$ é o conjunto $f^{-1}(C) = \{x \in A : f(x) \in C\}$.