Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

Análise Matemática III - Turma Especial

1º Teste - 7 de Novembro de 2002 - 9h

Duração: 1 hora e 30 minutos.
Apresente todos os cálculos e justificações relevantes.

1. Considere o conjunto

$$M = \left\{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : x^2 + y^2 = 1 \text{ e } z^2 + w^2 = 1\right\}$$

(2 val.) (a) Prove que M é uma variedade e indique a respectiva dimensão.

Resolução: M é o conjunto dos zeros da função C^∞ $\mathbf{F} : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ dada por

$$\mathbf{F}(x, y, z, w) = (x^2 + y^2 - 1, z^2 + w^2 - 1).$$

A matriz Jacobiana desta função é

$$D\mathbf{F}(x, y, z, w) = \begin{bmatrix} 2x & 2y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2z & 2w \end{bmatrix},$$

e possui característica 2 no aberto

$$U = \left\{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : (x, y) \neq (0, 0) \text{ e } (z, w) \neq (0, 0)\right\},$$

que claramente contém M. Logo M é uma variedade diferenciável de classe C^∞ e dimensão $4 - 2 = 2$.

(2 val.) (b) Escreva as equações do plano tangente a M no ponto $\left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}, 0, 1\right)$.

Resolução: Sabemos que

$$\begin{aligned} T^\perp_{\left(\frac{3}{5},\frac{4}{5},0,1\right)} M &= \operatorname{span}\left\{\nabla F^1\left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}, 0, 1\right), \nabla F^2\left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}, 0, 1\right)\right\} \\ &= \operatorname{span}\left\{\left(\frac{6}{5}, \frac{8}{5}, 0, 0\right); (0, 0, 0, 2)\right\} \\ &= \operatorname{span}\left\{(3, 4, 0, 0); (0, 0, 0, 1)\right\}. \end{aligned}$$

Consequentemente, as equações Cartesianas do plano tangente a M no ponto $\left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}, 0, 1\right)$ serão da forma

$$\begin{cases} 3x + 4y = a \\ w = b \end{cases}$$

com $a, b \in \mathbb{R}$. Uma vez que o ponto $\left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}, 0, 1\right)$ deve satisfazer estas equações, temos $a = \frac{9}{5} + \frac{16}{5} = 5$ e $b = 1$, pelo que as equações Cartesianas do plano tangente a M no ponto $\left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}, 0, 1\right)$ são

$$\begin{cases} 3x + 4y = 5 \\ w = 1 \end{cases}$$

(3 val.) (c) Calcule a distância de M ao ponto $(1,1,1,1)$.

Resolução: M é compacta: é limitada (porque se $\mathbf{x} \in M$ então $\|\mathbf{x}\|^2 = x^2 + y^2 + z^2 + w^2 = 1 + 1 = 2$) e é fechada (por ser o conjunto dos zeros da função contínua $\mathbf{F}$). A função distância ao ponto $(1,1,1,1)$, $d(x,y,z,w) = \|(x,y,z,w) - (1,1,1,1)\|$, é contínua, pelo que a sua restrição a M tem pelo menos um ponto de mínimo. A distância de M ao ponto $(1,1,1,1)$, ou seja,

$$\inf_{(x,y,z,w)\in M} \|(x,y,z,w) - (1,1,1,1)\|,$$

será então o valor de d num ponto de mínimo. Como os pontos de mínimo de d são pontos de mínimo de $f = d^2$, sabemos que terão que satisfazer as equações

$$\begin{cases} \nabla(f + \lambda_1 F^1 + \lambda_2 F^2)(x,y,z,w) = \mathbf{0} \\ \mathbf{F}(x,y,z,w) = \mathbf{0} \end{cases}$$

ou seja, uma vez que $f(x,y,z,w) = (x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 + (w-1)^2$,

$$\begin{cases} 2x - 2 + 2\lambda_1 x = 0 \\ 2y - 2 + 2\lambda_1 y = 0 \\ 2z - 2 + 2\lambda_2 z = 0 \\ 2w - 2 + 2\lambda_2 w = 0 \\ x^2 + y^2 = 1 \\ z^2 + w^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (\lambda_1 + 1)x = 1 \\ (\lambda_1 + 1)y = 1 \\ (\lambda_2 + 1)z = 1 \\ (\lambda_2 + 1)w = 1 \\ x^2 + y^2 = 1 \\ z^2 + w^2 = 1 \end{cases}$$

Como $\lambda_1, \lambda_2 \neq -1$, facilmente se vê que as soluções do sistema são dadas por

$$\begin{cases} x = y = \pm\frac{\sqrt{2}}{2} \\ z = w = \pm\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

Portanto pelo menos um dos quatro pontos

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right); \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right);$$
$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right); \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

será um ponto de mínimo. O valor de f em cada um deles é

$$6 - 4\sqrt{2}; \quad 6; \quad 6; \quad 6 + \sqrt{2},$$

pelo que o ponto de mínimo é o primeiro e a distância de M ao ponto $(1,1,1,1)$ é

$$\sqrt{6 - 4\sqrt{2}} = 2 - \sqrt{2}.$$

(3 val.) **2.** Escreva uma expressão para o integral iterado

$$\int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{1-x-y} f(x,y,z)\,dz\,dy\,dx$$

usando coordenadas esféricas.

Resolução: A região de integração é o conjunto

$$\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x\geq 0, y\geq 0, z\geq 0, x+y+z\leq 1\}.$$

A equação do plano $x+y+z=1$ em coordenadas esféricas é

$$r\text{sen}\theta\cos\varphi + r\text{sen}\theta\text{sen}\varphi + r\cos\theta = 1 \Leftrightarrow r = \frac{1}{\text{sen}\theta\cos\varphi+\text{sen}\theta\text{sen}\varphi+\cos\theta}.$$

Logo o integral iterado pode ser escrito em coordenadas esféricas como

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{1}{\text{sen}\theta\cos\varphi+\text{sen}\theta\text{sen}\varphi+\cos\theta}} f(r\text{sen}\theta\cos\varphi, r\text{sen}\theta\text{sen}\varphi, r\cos\theta)r^2\text{sen}\theta drd\theta d\varphi.$$

(3 val.) **3.** Calcule o volume do seguinte conjunto mensurável à Jordan:

$$A = \left\{(x,y,z,u,v)\in\mathbb{R}^5 : x^2+y^2+z^2+u^2+v^2\leq 1\right\}.$$

Resolução: Em A temos $r^2 = x^2+y^2+z^2\leq 1$. Fixo (x,y,z) satisfazendo esta condição, temos $u^2+v^2\leq 1-r^2$, i.e., (u,v) varia num círculo de raio $1-r^2$. Logo

$$\begin{aligned}
V_5(A) &= \int_{\{r^2\leq 1\}}\left(\int_{\{u^2+v^2\leq 1-r^2\}} dudv\right) dxdydz \\
&= \int_{\{r^2\leq 1\}} \pi\left(1-r^2\right) dxdydz \\
&= \pi\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^1 \left(1-r^2\right) r^2\text{sen}\theta drd\theta d\varphi \\
&= 2\pi^2\left[-\cos\theta\right]_0^{\pi}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right) \\
&= \frac{8\pi^2}{15}.
\end{aligned}$$

(3 val.) **4.** Mostre que a equação

$$\int_0^x e^{-yt^2}dt = 1$$

define y como função de x numa vizinhança do ponto $(1,0)$. Designando esta função implícita por f, calcule $f'(1)$.

Resolução: Pondo

$$F(x,y) = \int_0^x e^{-yt^2}dt - 1$$

temos

$$F(1,0) = \int_0^1 1dt - 1 = 0.$$

Uma vez que e^{-yt^2} é uma função de classe C^∞ de (t,y), o Teorema Fundamental do Cálculo e a Regra de Leibnitz garantem que F é de classe C^∞ e

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial F}{\partial x}(x,y) = e^{-yx^2};\\
&\frac{\partial F}{\partial y}(x,y) = \int_0^x \frac{\partial}{\partial y} e^{-yt^2} dt = \int_0^x \left(-t^2 e^{-yt^2}\right) dt.
\end{aligned}$$

Portanto

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial F}{\partial x}(1,0) = 1;\\
&\frac{\partial F}{\partial y}(1,0) = -\int_0^1 t^2 dt = -\frac{1}{3} \neq 0.
\end{aligned}$$

Pelo Teorema da Função Implícita, existe uma vizinhança aberta $U \times V$ do ponto $(1,0)$ e uma função C^∞ $f : U \to V$ tais que para $(x,y) \in U \times V$

$$F(x,y) = 0 \Leftrightarrow y = f(x).$$

Por fim, para $x \in U$

$$F(x,f(x)) = 0 \Rightarrow \frac{\partial F}{\partial x}(1,0) + \frac{\partial F}{\partial y}(1,0) f'(1) = 0 \Leftrightarrow f'(1) = 3.$$

5. Seja $\{q_n\}$ uma enumeração dos racionais do intervalo $[0,1]$ e considere o conjunto

$$U = \bigcup_{n=1}^{+\infty} \left]q_n - \frac{1}{10^n}, q_n + \frac{1}{10^n}\right[$$

(3 val.) (a) Mostre que $K = [0,1] \setminus U$ é um conjunto compacto que não tem medida nula (em particular é não vazio).

Resolução: K é compacto porque $[0,1]$ é compacto e U é aberto (união de abertos). Se K tivesse medida nula, poderia ser coberto por uma família numerável de intervalos abertos $\{I_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ com

$$\sum_{n=1}^{+\infty} V_1(I_n) < \frac{1}{9}.$$

Por outro lado, U é coberto pela família numerável de intervalos abertos $\{J_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, onde

$$J_n = \left]q_n - \frac{1}{10^n}, q_n + \frac{1}{10^n}\right[,$$

e portanto

$$\sum_{n=1}^{+\infty} V_1(J_n) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{10^n} = \frac{\frac{2}{10}}{1-\frac{1}{10}} = \frac{2}{9}.$$

Se K tivesse medida nula seria então possível cobrir $[0,1]$ com uma família numerável de intervalos abertos cuja série dos volumes seria inferior a $\frac{1}{3}$. Uma vez que $[0,1]$ é compacto, o teorema de Heine-Borel garantiria a existência de uma subcobertura finita por intervalos abertos cuja soma dos volumes teria que ser ainda inferior a $\frac{1}{3}$. Designando esta subcobertura por $\{U_n\}_{n=1}^N$, teríamos

$$\chi_{U_1} + \ldots + \chi_{U_N} \geq \chi_{[0,1]} \Rightarrow \sum_{n=1}^{N} V_1(U_n) \geq V_1([0,1]) = 1,$$

em contradição com o facto desta soma ter que ser inferior a $\frac{1}{3}$. Concluimos que K não pode ter medida nula.

(1 val.) (b) Mostre que $\partial K = K$. Conclua que K não é mensurável à Jordan.

Resolução: Como K é fechado, $K \supset \partial K$. Por outro lado, K não contém nenhum racional do intervalo $[0,1]$. Ora em qualquer vizinhança de qualquer ponto do intervalo $[0,1]$ existem pontos racionais deste intervalo. Concluimos que todos os pontos de K são fronteiros, e portanto $K \subset \partial K$. Portanto $\partial K = K$ não tem medida nula, e K não pode ser mensurável à Jordan.