Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

Análise Matemática III - Turma Especial

1º Teste - 7 de Novembro de 2002 - 9h

Duração: 1 hora e 30 minutos.
Apresente todos os cálculos e justificações relevantes.

1. Considere o conjunto

$$M = \left\{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : x^2 + y^2 = 1 \text{ e } z^2 + w^2 = 1\right\}$$

(2 val.) (a) Prove que M é uma variedade e indique a respectiva dimensão.

(2 val.) (b) Escreva as equações do plano tangente a M no ponto $\left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}, 0, 1\right)$.

(3 val.) (c) Calcule a distância de M ao ponto $(1, 1, 1, 1)$.

(3 val.) **2.** Escreva uma expressão para o integral iterado

$$\int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{1-x-y} f(x, y, z) dz dy dx$$

usando coordenadas esféricas.

(3 val.) **3.** Calcule o volume do seguinte conjunto mensurável à Jordan:

$$A = \left\{(x, y, z, u, v) \in \mathbb{R}^5 : x^2 + y^2 + z^2 + u^2 + v^2 \leq 1\right\}.$$

(3 val.) **4.** Mostre que a equação

$$\int_0^x e^{-yt^2} dt = 1$$

define y como função de x numa vizinhança do ponto $(1, 0)$. Designando esta função implícita por f, calcule $f'(1)$.

5. Seja $\{q_n\}$ uma enumeração dos racionais do intervalo $[0, 1]$ e considere o conjunto

$$U = \bigcup_{n=1}^{+\infty} \left] q_n - \frac{1}{10^n}, q_n + \frac{1}{10^n} \right[$$

(3 val.) (a) Mostre que $K = [0, 1] \setminus U$ é um conjunto compacto que não tem medida nula (em particular é não vazio).

(1 val.) (b) Mostre que $\partial K = K$. Conclua que K não é mensurável à Jordan.