Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

Análise Matemática III - Turma Especial

Teste para praticar

Duração: 1 hora e 30 minutos.
Apresente todos os cálculos e justificações relevantes.

1. Considere o conjunto

$$M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + xy + y^2 + yz + z^2 + zx = 1\}$$

(2 val.) (a) Prove que M é uma variedade.

(2 val.) (b) Determine os pontos em que o plano tangente a M é horizontal (i.e., paralelo ao plano $z = 0$).

(3 val.) (c) Calcule a distância de M ao plano $x + y + z = 2$.

2. Considere o seguinte conjunto mensurável à Jordan:

$$A = \left\{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 : (\sqrt{x^2+y^2+z^2} - 2)^2 + w^2 \leq 1\right\}.$$

(3 val.) (a) Escreva uma expressão para o volume de A em termos de integrais iterados da forma $\int(\int(\int(\int dx)dy)dz)dw$.

(3 val.) (b) Seja $f(x,y,z,w) = |w|$. Calcule $\int_A f dV_4$.

(3 val.) **3.** Mostre que uma função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe C^1 nunca é injectiva.

(3 val.) **4.** (a) Seja $I \subset \mathbb{R}^n$ um intervalo compacto e $f : I \to \mathbb{R}$ uma função não negativa integrável à Riemann em I. Mostre que se $\int_I f = 0$ então $f^{-1}(]0, +\infty[)$ tem medida nula.

(1 val.) (b) Generalize o resultado da alínea anterior para o caso em que I é um aberto qualquer e f uma função não negativa integrável em I (no sentido de existir uma cobertura admissível $\mathcal{O}$ de I e uma partição da unidade Φ para I subordinada a $\mathcal{O}$ tais que

$$\sum_{\varphi\in\Phi} \int_I \varphi f$$

converge).