Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

Análise Matemática III - Turma Especial

2º exame - 29 de Janeiro de 2003 - 17h

Duração: 3 horas.
Apresente todos os cálculos e justificações relevantes.

1. Considere os conjuntos

$$S^3 = \left\{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 : x^2+y^2+z^2+w^2 = 2\right\};$$
$$T^2 = \left\{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 : x^2+y^2 = z^2+w^2 = 1\right\}.$$

(2 val.) (a) Prove que S^3 e T^2 são variedades compactas e indique as respectivas dimensões.

(2 val.) (b) Determine o máximo e o mínimo da restrição de $f(x,y,z,w) = x+y+z+w$ a T^2.

(2 val.) (c) Mostre que S^3 e T^2 são orientáveis.

(3 val.) (d) $T^2 \subset S^3$ divide S^3 em duas componentes conexas. Sendo M uma destas componentes conexas, e

$$\omega = z dx \wedge dy \wedge dw - x dy \wedge dz \wedge dw,$$

calcule os dois possíveis valores de $\int_M \omega$.

(3 val.) **2.** Prove que toda a cobertura aberta admite uma subcobertura numerável. Use este resultado para mostrar que qualquer variedade $M \subset \mathbb{R}^n$ de dimensão $m < n$ tem medida nula.

(3 val.) **3.** Mostre que a função $f :]0,+\infty[\times]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x,y) = \frac{x}{y} e^{-xy-\frac{x}{y}}$$

é integrável em $]0,+\infty[\times]0,+\infty[$, e calcule o respectivo integral. (**Sugestão:** *Utilize uma mudança de coordenadas apropriada*).

Resolva apenas uma das duas seguintes questões:

(3 val.) **4.** (a) Mostre que se $\omega \in \Omega^1(\mathbb{R}^2 \setminus \{\mathbf{0}\})$ é fechada, então existem $\alpha \in \mathbb{R}$ e uma função de classe C^∞ $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{\mathbf{0}\} \to \mathbb{R}$ tais que

$$\omega = \alpha \left(-\frac{y}{x^2+y^2} dx + \frac{x}{x^2+y^2} dy \right) + df.$$

(**Sugestão:** *Recorde que dado $U \subset \mathbb{R}^n$ aberto se tem que $\omega \in \Omega^m(U)$ é exacta* sse $\oint_M \omega = 0$ *para toda a variedade-m compacta $M \subset U$*).

(1 val.) (b) Escreva a expressão geral de um campo vectorial de classe C^∞ *irrotacional* (*i.e.*, com rotacional nulo) em $\mathbb{R}^3 \setminus \{x = y = 0\}$ (não precisa de justificar).

(1 val.) (c) Escreva a expressão geral de um campo vectorial de classe C^∞ *solenoidal* (*i.e.*, com divergência nula) em $\mathbb{R}^3 \setminus \{\mathbf{0}\}$ (não precisa de justificar).

5. Uma função $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de classe C^2 diz-se *harmónica* se satisfaz a *equação de Laplace*

$$\nabla^2 f = 0$$

(onde $\nabla^2 f = \nabla \cdot (\nabla f)$).

(2 val.) (a) Mostre que se f é harmónica então satisfaz a *propriedade do valor médio:*

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}_0) &= \frac{1}{V_{n-1}\left(\partial B_r(\mathbf{x}_0)\right)} \int_{\partial B_r(\mathbf{x}_0)} f(\mathbf{x}) dV_{n-1}(\mathbf{x}) \\ &= \frac{1}{V_{n-1}\left(S^{n-1}\right)} \int_{S^{n-1}} f(\mathbf{x}_0 + r\mathbf{x}) dV_{n-1}(\mathbf{x}) \end{aligned}$$

para todo o $r \in \mathbb{R}^+$ tal que $B_r(\mathbf{x}_0) \subset U$. (**Sugestão:** *Mostre que o segundo integral não depende de r*).

(3 val.) (b) (**Gaiola de Faraday**): Mostre que se $U \subset \mathbb{R}^n$ é um aberto conexo limitado e $f : \overline{U} \to \mathbb{R}$ é contínua em $\overline{U}$, harmónica em U e constante em ∂U, então f é constante em $\overline{U}$. (**Sugestão:** *Mostre que se f possui um ponto de extremo local em U tem que ser constante numa vizinhança desse ponto*).