Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

Análise Matemática III - Turma Especial

1º exame - 15 de Janeiro de 2003 - 17h

Duração: 3 horas.
Apresente todos os cálculos e justificações relevantes.

(2 val.) **1.** Mostre que para $|\delta|, |\varepsilon|$ suficientemente pequenos o polinómio

$$p(x) = x^5 - x^4 + \delta x^2 + x - 1 + \varepsilon$$

possui uma raiz real que se pode exprimir como função de classe C^∞ dos parâmetros δ, ε. Escreva a fórmula de Taylor desta função até à 1ª ordem (*i.e.*, com resto de 2ª ordem; não precisa de indicar a expressão do resto).

Resolução: Consideramos a função de classe C^∞ $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definida por

$$F(x, \delta, \varepsilon) = x^5 - x^4 + \delta x^2 + x - 1 + \varepsilon.$$

Temos $F(1, 0, 0) = 0$ e $\partial_1 F(1, 0, 0) = 2$. Pelo Teorema da Função Implícita, para $|\delta|, |\varepsilon|, |x - 1|$ suficientemente pequenos a equação $F(x, \delta, \varepsilon) = 0$ é equivalente a $x = g(\delta, \varepsilon)$, onde g é uma função de classe C^∞. Concluimos que para $|\delta|, |\varepsilon|$ suficientemente pequenos o polinómio p tem pelo menos a raiz $x = g(\delta, \varepsilon)$, que se exprime como uma função de classe C^∞ de δ, ε. Além disso,

$$\partial_1 F(1,0,0)\partial_1 g(0,0) + \partial_2 F(1,0,0) = 0 \Rightarrow 2\partial_1 g(0,0) + 1 = 0 \Rightarrow \partial_1 g(0,0) = -\frac{1}{2};$$
$$\partial_2 F(1,0,0)\partial_2 g(0,0) + \partial_3 F(1,0,0) = 0 \Rightarrow 2\partial_2 g(0,0) + 1 = 0 \Rightarrow \partial_2 g(0,0) = -\frac{1}{2},$$

e portanto em torno do ponto $(0, 0)$ tem-se

$$g(\delta, \varepsilon) = g(0,0) + \nabla g(0,0) \cdot (\delta, \varepsilon) + r_2(\varepsilon, \delta) = 1 - \frac{1}{2}\delta - \frac{1}{2}\varepsilon + r_2(\varepsilon, \delta).$$

(2 val.) **2.** Use o método dos multiplicadores de Lagrange para provar a desigualdade de Cauchy-Schwarz.

Resolução: Queremos mostrar que

$$|\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}| \leq \|\mathbf{x}\| \|\mathbf{y}\|$$

para todo o $\mathbf{x},\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$. Se $\|\mathbf{x}\| = 0$ ou $\|\mathbf{y}\| = 0$, a igualdade verifica-se trivialmente; supomos portanto que $\|\mathbf{x}\| = a \neq 0$ e $\|\mathbf{y}\| = b \neq 0$. É imediato ver que

$$M_{(a,b)} = \{(\mathbf{x},\mathbf{y}) \in \mathbb{R}^{2n} : \|\mathbf{x}\| = a \text{ e } \|\mathbf{y}\| = b\}$$

é uma variedade-$(2n-2)$ compacta em $\mathbb{R}^{2n}$. Consequentemente, a função $f(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \mathbf{x}\cdot\mathbf{y}$ possuirá necessariamente máximo e mínimo em $M_{(a,b)}$, que deverá satisfazer

$$\begin{cases} \nabla(\mathbf{x}\cdot\mathbf{y} + \lambda_1\|\mathbf{x}\|^2 + \lambda_2\|\mathbf{y}\|^2) = (\mathbf{0},\mathbf{0}) \\ \|\mathbf{x}\|^2 = a^2 \\ \|\mathbf{y}\|^2 = b^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \mathbf{y} + 2\lambda_1\mathbf{x} = \mathbf{0} \\ \mathbf{x} + 2\lambda_2\mathbf{y} = \mathbf{0} \\ \|\mathbf{x}\|^2 = a^2 \\ \|\mathbf{y}\|^2 = b^2 \end{cases}$$

Concluímos que os pontos de máximo e mínimo deverão satisfazer

$$\mathbf{y} = \pm\frac{b}{a}\mathbf{x},$$

pelo que o máximo e o mínimo de f serão

$$\pm\frac{b}{a}\|\mathbf{x}\|^2 = \pm ab.$$

Potanto,

$$-ab \leq f(\mathbf{x},\mathbf{y}) \leq ab \Leftrightarrow -\|\mathbf{x}\|\|\mathbf{y}\| \leq \mathbf{x}\cdot\mathbf{y} \leq \|\mathbf{x}\|\|\mathbf{y}\|.$$

(2 val.) **3.** Usando coordenadas Cartesianas, escreva uma expressão para o seguinte integral triplo:

$$\int_0^1 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{1-z}{\cos\theta+\operatorname{sen}\theta}} r^3 dr d\theta dz$$

Resolução: Observando que o Jacobiano das coordenadas cilíndricas é r e que

$$r = \frac{1-z}{\cos\theta + \operatorname{sen}\theta} \Leftrightarrow r\cos\theta + r\operatorname{sen}\theta = 1 - z \Leftrightarrow x + y + z = 1$$

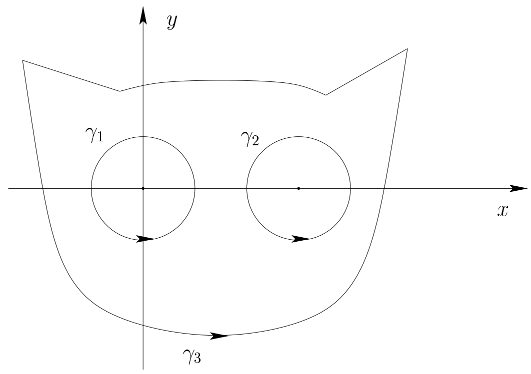
temos

$$\int_0^1 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{1-z}{\cos\theta+\operatorname{sen}\theta}} r^3 dr d\theta dz = \int_0^1 \int_0^{1-z} \int_0^{1-z-y} (x^2+y^2) dx dy dz.$$

4. Considere a forma-1 definida em $\mathbb{R}^2 \setminus \{\mathbf{0}\}$ por

$$\omega = -\frac{x^2 y}{(x^2+y^2)^2}dx + \frac{x^3}{(x^2+y^2)^2}dy.$$

Sejam γ_1 e γ_2 as circunferências de raio 1 centradas em $(0,0)$ e $(3,0)$, e γ_3 a curva simples fechada representada na figura. Com as orientações indicadas na figura, calcule



(2 val.) (a) $\oint_{\gamma_1} \omega$;

Resolução: A parametrização $\mathbf{g} :]0, 2\pi[\to \mathbb{R}^3$ para γ_1 dada por

$$\mathbf{g}(\theta) = (\cos\theta, \mathrm{sen}\theta)$$

é compatível com a orientação indicada na figura. Como

$$\mathbf{g}^*\omega = \cos^2\theta d\theta,$$

temos

$$\oint_{\gamma_1} \omega = \int_{]0,2\pi[^+} \cos^2\theta d\theta = \pi.$$

(1 val.) (b) $\oint_{\gamma_2} \omega$;

Resolução: É fácil ver que

$$d\omega = 0.$$

O aberto $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$ é um conjunto em estrela contido no domínio de ω; pelo Lema de Poincaré, ω é exacta neste conjunto. Uma vez que $\gamma_2 \subset \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$, concluímos que

$$\oint_{\gamma_2} \omega = 0.$$

(1 val.) (c) $\oint_{\gamma_3} \omega$.

Resolução: Uma vez que γ_3 é homotópica a γ_1 em $\mathbb{R}^2 \setminus \{\mathbf{0}\}$, concluímos que

$$\oint_{\gamma_3} \omega = \oint_{\gamma_1} \omega = \pi.$$

(2 val.) **5.** Sejam

$$M = \{(x, y, z, u, v) \in \mathbb{R}^5 : x^2 + y^2 + z^2 = u^2 + v^2 = 1\}$$

e

$$\omega = xudy \wedge dz \wedge dv - xvdy \wedge dz \wedge du.$$

Use o Teorema de Stokes para calcular $\oint_{M^\mu} \omega$, onde μ é a orientação induzida pelo covector-3 $dy \wedge dz \wedge dv$ no ponto $(1, 0, 0, 1, 0)$.

Resolução: Começamos por observar que M é o bordo de

$$N = \{(x,y,z,u,v) \in \mathbb{R}^5 : x^2+y^2+z^2 \leq 1 \text{ e } u^2+v^2=1\}.$$

Pelo Teorema de Stokes,

$$\oint_{M^\mu} \omega = \int_{N^\nu} d\omega,$$

onde ν é a orientação de N que induz a orientação μ de $M = \partial N$. A parametrização $\mathbf{g} :]0,1]\times]0,\pi[\times]0,2\pi[\times]0,2\pi[$ dada por

$$\mathbf{g}(r,\theta,\varphi,\psi) = (r\text{sen}\theta\cos\varphi, r\text{sen}\theta\text{sen}\varphi, r\cos\theta, \cos\psi, \text{sen}\psi)$$

para N é de forma que $\mathbf{h}(\theta,\varphi,\psi) = \mathbf{g}(1,\theta,\varphi,\psi)$ é uma parametrização de M. Além disso,

$$\mathbf{h}\left(\frac{\pi}{2},0,0\right) = (1,0,0,1,0).$$

Tem-se

$$\mathbf{h}^* dy\wedge dz\wedge dv = d(\text{sen}\theta\text{sen}\varphi)\wedge d(\cos\theta)\wedge d(\text{sen}\psi) = \text{sen}^2\theta\cos\varphi\cos\psi d\theta\wedge d\varphi\wedge d\psi,$$

o que no ponto $\left(\frac{\pi}{2},0,0\right)$ é $d\theta\wedge d\varphi\wedge d\psi$. Portanto $\mathbf{h}$ é compatível com μ; uma vez que r é o primeiro parâmetro e $\mathbf{g}$ parametriza N para $r<1$, concluímos que $\mathbf{g}$ é compatível com ν. Finalmente,

$$d\omega = d[xdy\wedge dz\wedge(vdu-udv)] = dx\wedge dy\wedge dz\wedge(udv-vdu) + 2xdy\wedge dz\wedge du\wedge dv$$

e

$$\mathbf{g}^* d\omega = r^2\text{sen}\theta dr\wedge d\theta\wedge d\varphi\wedge d\psi,$$

pelo que

$$\int_{N^\nu} d\omega = \int_{]0,1[\times]0,\pi[\times]0,2\pi[\times]0,2\pi[^+} r^2\text{sen}\theta dr\wedge d\theta\wedge d\varphi\wedge d\psi = \frac{4\pi}{3}\cdot 2\pi = \frac{8\pi^2}{3}.$$

6. Considere a superfície

$$S = \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2=1,\ x\geq 0,\ y\geq 0\right\}$$

e o campo vectorial $\mathbf{F}:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ dado por

$$\mathbf{F}(x,y,z) = (z,y,-x).$$

Calcule $\int_S (\nabla\times\mathbf{F})\cdot\mathbf{n}\,dV_2$, onde $\mathbf{n}$ é a normal unitária a S tal que $n^1\geq 0$,

(2 val.) (a) Usando o Teorema de Stokes para campos vectoriais;

Resolução: Pelo Teorema de Stokes,

$$\int_S (\nabla\times\mathbf{F})\cdot\mathbf{n}\,dV_2 = \int_{\partial S}\mathbf{F}\cdot d\mathbf{g}.$$

O bordo de S pode ser parametrizado por $\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2 :]0, \pi[\to \mathbb{R}^3$ dadas por

$$\mathbf{g}_1(\theta) = (0, \text{sen}\theta, -\cos\theta);$$
$$\mathbf{g}_2(\theta) = (\text{sen}\theta, 0, \cos\theta),$$

que induzem a orientação resultante da regra da mão direita. Consequentemente,

$$\int_S (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n}\, dV_2 = \int_{\partial S} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{g}$$
$$= \int_0^\pi (-\cos\theta, \text{sen}\theta, 0) \cdot (0, \cos\theta, \text{sen}\theta) d\theta + \int_0^\pi (\cos\theta, 0, -\text{sen}\theta) \cdot (\cos\theta, 0, -\text{sen}\theta) d\theta$$
$$= \int_0^\pi (\text{sen}\theta \cos\theta + 1) d\theta = \pi.$$

(2 val.) (b) Usando o Teorema da Divergência.

Resolução: Como é sabido, $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{F}) = 0$. Designamos por U o aberto limitado por S e pelos planos $x = 0$ e $y = 0$, e por T_1 e T_2 as porções de ∂U contidas nestes planos. Pelo Teorema da Divergência temos então (notando que $\mathbf{n}$ é a normal exterior a U)

$$\int_S (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n}\, dV_2 + \int_{T_1} (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n}\, dV_2 + \int_{T_2} (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n}\, dV_2 = \int_U \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{F})\, dV_3 = 0.$$

Observando que $d(zdx + ydy - xdz) = 2dz \wedge dx$, facilmente se conclui que $\nabla \times \mathbf{F} = (0, 2, 0)$. Daí que

$$\int_{T_1} (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n}\, dV_2 = \int_{T_1} (0, 2, 0) \cdot (-1, 0, 0)\, dV_2 = \int_{T_1} 0\, dV_2 = 0$$

e

$$\int_{T_2} (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n}\, dV_2 = \int_{T_2} (0, 2, 0) \cdot (0, -1, 0)\, dV_2 = \int_{T_1} (-2)\, dV_2 = -2V_2(T_2) = -\pi,$$

donde mais uma vez

$$\int_S (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n}\, dV_2 = \pi.$$

(2 val.) **7.** Seja $S \subset \mathbb{R}^3$ uma variedade-2, e $\mathbf{F} \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ um campo de classe C^1 ortogonal a S (*i.e.*, tal que $\mathbf{F}(\mathbf{x}) \in T_{\mathbf{x}}^{\perp} S$ para todo o $\mathbf{x} \in S$). Mostre que $\nabla \times \mathbf{F}$ é tangente a S.

Resolução: Suponhamos que $\nabla \times \mathbf{F}$ não era tangente a S; então existiria algum ponto de S no qual $(\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n} > 0$, para um vector normal unitário a S apropriado $\mathbf{n}$. Uma vez que $\mathbf{F}$ é de classe C^1, $\nabla \times \mathbf{F}$ é contínuo, e portanto seria $(\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n} > 0$ em $S \cap U$ (que podemos supor orientável), para alguma vizinhança aberta U do ponto considerado. Sendo $\gamma \subset S \cap U$ uma curva fechada bordo de uma variedade-2 compacta $\Sigma \subset S \cap U$, teríamos então pelo Teorema de Stokes

$$\oint_\gamma \mathbf{F} \cdot d\mathbf{g} = \int_\Sigma (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n}\, dV_2 > 0.$$

Mas por outro lado

$$\oint_\gamma \mathbf{F} \cdot d\mathbf{g} = \oint_\gamma \mathbf{F} \cdot \boldsymbol{\tau}\, dV_1 = \oint_\gamma 0\, dV_1 = 0,$$

uma vez que o vector tangente unitário $\boldsymbol{\tau}$ a γ é tangente a S e $\mathbf{F}$ é ortogonal a S. Concluímos que $\nabla \times \mathbf{F}$ tem que ser tangente a S.

Alternativamente, sabemos que localmente S é dada por $\Phi(\mathbf{x}) = 0$, onde $\nabla\Phi(\mathbf{x}) \neq \mathbf{0}$ gera o espaço normal a S no ponto $\mathbf{x} \in S$. É possível mostrar que localmente um campo $\mathbf{F}$ ortogonal a S terá que ser da forma $\mathbf{F} = \alpha\nabla\Phi$ para alguma função α de classe C^1. Portanto

$$\nabla \times \mathbf{F} = \nabla \times (\alpha\nabla\Phi) = \nabla\alpha \times \nabla\Phi + \alpha\nabla \times (\nabla\Phi) = \nabla\alpha \times \nabla\Phi,$$

e portanto $\nabla \times \mathbf{F}$ é ortogonal a $\nabla\Phi$, ou seja, é tangente a S.

(2 val.) **8.** Mostre que a função $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x,y,z,w) = \frac{x^2|y|}{(x^2+y^2+z^2+w^2)^3(1+x^2+y^2+z^2+w^2)}$$

é integrável em $\mathbb{R}^4$, e calcule o respectivo integral.

Resolução: A justificação de que a função é integrável e de que os cálculos seguintes são válidos usando o Teorema da Convergência Monótona fica como exercício. Usando a transformação de coordenadas $(x,y,z,w) = (r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta\cos\varphi, r\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\varphi, w)$ temos

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2|y|}{(x^2+y^2+z^2+w^2)^3(1+x^2+y^2+z^2+w^2)} dxdydzdw$$
$$= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_0^{+\infty}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} \frac{r^3\cos^2\theta\operatorname{sen}\theta|\cos\varphi|}{(r^2+w^2)^3(1+r^2+w^2)} r^2\operatorname{sen}\theta d\varphi d\theta dr dw =$$
$$= \left(2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\varphi d\varphi\right)\left(\int_0^{\pi} \frac{1}{4}\operatorname{sen}^2(2\theta) d\theta\right)\int_{-\infty}^{+\infty}\int_0^{+\infty} \frac{r^5}{(r^2+w^2)^3(1+r^2+w^2)} dr dw$$
$$= 4 \cdot \frac{\pi}{8}\int_0^{+\infty}\int_0^{\pi} \frac{\rho^5\operatorname{sen}^5\psi}{\rho^6(1+\rho^2)}\rho d\psi d\rho = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}(1-\cos^2\psi)^2\operatorname{sen}\psi d\psi \int_0^{+\infty}\frac{1}{1+\rho^2}d\rho$$
$$= \frac{\pi}{2}[\operatorname{arctg}\rho]_0^{+\infty}\int_{-1}^{1}(1-u^2)^2 du = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{\pi}{2}\int_{-1}^{1}(1-2u^2+u^4)du$$
$$= \frac{\pi^2}{4}\left(2 - \frac{4}{3} + \frac{2}{5}\right) = \frac{4\pi^2}{15}.$$