**Instituto Superior Técnico**
**Departamento de Matemática**
**Secção de Álgebra e Análise**

# Análise Matemática III - Turma Especial

## 1º exame - 15 de Janeiro de 2003 - 17h

**Duração: 3 horas.**
**Apresente todos os cálculos e justificações relevantes.**

(2 val.) **1.** Mostre que para $|\delta|, |\varepsilon|$ suficientemente pequenos o polinómio

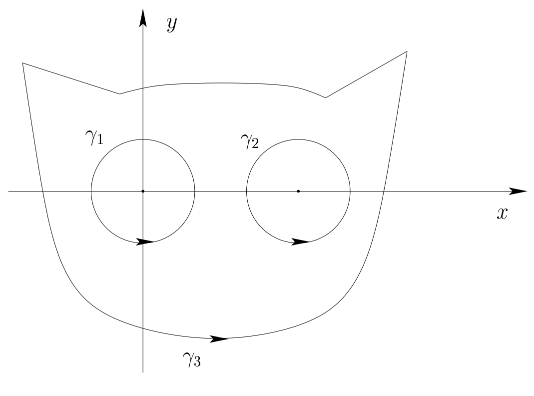
$$p(x) = x^5 - x^4 + \delta x^2 + x - 1 + \varepsilon$$

possui uma raiz real que se pode exprimir como função de classe $C^\infty$ dos parâmetros $\delta, \varepsilon$. Escreva a fórmula de Taylor desta função até à $1^{\text{a}}$ ordem (*i.e.*, com resto de $2^{\text{a}}$ ordem; não precisa de indicar a expressão do resto).

(2 val.) **2.** Use o método dos multiplicadores de Lagrange para provar a desigualdade de Cauchy-Schwarz.

(2 val.) **3.** Usando coordenadas Cartesianas, escreva uma expressão para o seguinte integral triplo:

$$\int_0^1 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{1-z}{\cos\theta + \operatorname{sen}\theta}} r^3 \, dr \, d\theta \, dz$$



**4.** Considere a forma-1 definida em $\mathbb{R}^2 \setminus \{\mathbf{0}\}$ por

$$\omega = -\frac{x^2 y}{(x^2+y^2)^2}dx + \frac{x^3}{(x^2+y^2)^2}dy.$$

Sejam $\gamma_1$ e $\gamma_2$ as circunferências de raio 1 centradas em $(0,0)$ e $(3,0)$, e $\gamma_3$ a curva simples fechada representada na figura. Com as orientações indicadas na figura, calcule

(2 val.) (a) $\oint_{\gamma_1} \omega$ ;

(1 val.) (b) $\oint_{\gamma_2} \omega$ ;

(1 val.) (c) $\oint_{\gamma_3} \omega$ .

(2 val.) **5.** Sejam

$$M = \{(x,y,z,u,v) \in \mathbb{R}^5 : x^2+y^2+z^2 = u^2+v^2 = 1\}$$

e

$$\omega = xudy \wedge dz \wedge dv - xvdy \wedge dz \wedge du.$$

Use o Teorema de Stokes para calcular $\oint_{M^\mu} \omega$, onde $\mu$ é a orientação induzida pelo covector-3 $dy \wedge dz \wedge dv$ no ponto $(1,0,0,1,0)$.

**6.** Considere a superfície

$$S = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 = 1,\ x \geq 0,\ y \geq 0\right\}$$

e o campo vectorial $\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dado por

$$\mathbf{F}(x,y,z) = (z, y, -x).$$

Calcule $\int_S (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n}\, dV_2$, onde $\mathbf{n}$ é a normal unitária a $S$ tal que $n^1 \geq 0$,

(2 val.) (a) Usando o Teorema de Stokes para campos vectoriais;

(2 val.) (b) Usando o Teorema da Divergência.

(2 val.) **7.** Seja $S \subset \mathbb{R}^3$ uma variedade-2, e $\mathbf{F} \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ um campo de classe $C^1$ ortogonal a $S$ (*i.e.*, tal que $\mathbf{F}(\mathbf{x}) \in T_{\mathbf{x}}^{\perp} S$ para todo o $\mathbf{x} \in S$). Mostre que $\nabla \times \mathbf{F}$ é tangente a $S$.

(2 val.) **8.** Mostre que a função $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x,y,z,w) = \frac{x^2|y|}{(x^2+y^2+z^2+w^2)^3(1+x^2+y^2+z^2+w^2)}$$

é integrável em $\mathbb{R}^4$, e calcule o respectivo integral.