Análise Matemática III - Turma Especial

Ficha Extra 4 - Geodésicas e Curvatura de Superfícies

Não precisam de entregar esta ficha

1. Seja $S \subset \mathbb{R}^3$ uma superfície (variedade-2) orientável e $\boldsymbol{\gamma} : [t_0, t_1] \times \mathbb{R} \to S$ (de classe C^2) uma família a um parâmetro de caminhos em S unindo os pontos $\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1 \in S$, i.e., tal que

$$\boldsymbol{\gamma}(t_0, \alpha) = \mathbf{x}_0$$
$$\boldsymbol{\gamma}(t_1, \alpha) = \mathbf{x}_1$$

   para todo o $\alpha \in \mathbb{R}$. O comprimento do caminho α é

$$L(\alpha) = \int_{t_0}^{t_1} \|\dot{\boldsymbol{\gamma}}(t, \alpha)\| \, dt,$$

   onde $\dot{\boldsymbol{\gamma}} = \frac{\partial \boldsymbol{\gamma}}{\partial t}$. Suponha que existe um caminho de comprimento mínimo, correspondendo a $\alpha = 0$. Mostre que

$$\int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\dot{\boldsymbol{\gamma}}(t, 0)}{\|\dot{\boldsymbol{\gamma}}(t, 0)\|} \right) \cdot \frac{\partial \boldsymbol{\gamma}}{\partial \alpha}(t, 0) dt = 0$$

   (**Sugestão:** *Derive* $L(\alpha)$ *e integre por partes*).

2. Mostre que o caminho de comprimento mínimo $\boldsymbol{\gamma}(t) = \boldsymbol{\gamma}(t, 0)$ tem que satisfazer

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\dot{\boldsymbol{\gamma}}(t)}{\|\dot{\boldsymbol{\gamma}}(t)\|} \right) \in T^{\perp}_{\boldsymbol{\gamma}(t)} S$$

   para todo o $t \in]t_0, t_1[$. Um caminho satisfazendo esta equação diz-se uma *geodésica* de S.

3. Seja S a superfície de revolução descrita em coordenadas cilíndricas por $r = f(z)$, onde $f : I \to \mathbb{R}^+$ é uma função de classe C^2 no intervalo aberto I. Mostre que as circunferências correspondentes aos pontos de extremo local de f são geodésicas. Mostre ainda que as secções da superfície por semiplanos de θ constante são também geodésicas. Particularize no caso em que S é uma superfície esférica e a superfície de um toro.

4. Seja $\mathbf{g} : V \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ uma parametrização de S. A *aplicação de Gauss* é a aplicação $\mathbf{n} : S \to S^2$ (S^2 designa a superfície esférica de raio 1 em $\mathbb{R}^3$) dada por

$$\mathbf{n}\left(t^1, t^2\right) = \frac{\partial_1 \mathbf{g} \times \partial_2 \mathbf{g}}{\|\partial_1 \mathbf{g} \times \partial_2 \mathbf{g}\|}.$$

   Mostre que

$$\mathbf{n} \cdot \partial_1 \mathbf{n} = \mathbf{n} \cdot \partial_2 \mathbf{n} = 0,$$

   e que portanto

$$\partial_1 \mathbf{n} \times \partial_2 \mathbf{n} = \kappa\left(t^1, t^2\right) \partial_1 \mathbf{g} \times \partial_2 \mathbf{g}.$$

   A função $\kappa\left(t^1, t^2\right)$ diz-se a *curvatura* de S no ponto $\mathbf{g}\left(t^1, t^2\right)$.

5. Mostre que

$$|\kappa\left(t^1,t^2\right)| = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{V_2\left(\mathbf{n}\circ\mathbf{g}\left(B_\varepsilon\left(t^1,t^2\right)\right)\right)}{V_2\left(\mathbf{g}\left(B_\varepsilon\left(t^1,t^2\right)\right)\right)}.$$

6. Mostre que

$$\partial_i\mathbf{n} = \sum_{j=1}^{2} a_{ij}\partial_j\mathbf{g}$$

e que

$$\partial_i\mathbf{n}\cdot\partial_j\mathbf{g} = -\mathbf{n}\cdot\partial_i\partial_j\mathbf{g}.$$

Conclua que

$$\left(a_{ij}\right)\cdot\left(g_{jk}\right) = -\left(b_{ik}\right),$$

onde

$$g_{ij} = \partial_i\mathbf{g}\cdot\partial_j\mathbf{g}$$

e

$$b_{ij} = \mathbf{n}\cdot\partial_i\partial_j\mathbf{g}.$$

7. Mostre que

$$\partial_1\mathbf{n}\times\partial_2\mathbf{n} = \det\left(a_{ij}\right)\partial_1\mathbf{g}\times\partial_2\mathbf{g}.$$

Conclua que

$$\kappa\left(t^1,t^2\right) = \frac{\det\left(b_{ij}\right)}{\det\left(g_{ij}\right)}.$$

8. Seja $M\subset\mathbb{R}^n$ uma variedade-m. Uma função $\mathbf{f}: M\to\mathbb{R}^p$ diz-se *diferenciável* se para qualquer parametrização $\mathbf{g}: V\subset\mathbb{R}^m\to M\cap U$ a função $\mathbf{f}\circ\mathbf{g}: V\to\mathbb{R}^p$ é diferenciável. Se

$$\mathbf{v} = \sum_{i=1}^{m} v^i\partial_i\mathbf{g}\in T_{\mathbf{g}(\mathbf{t})},$$

define-se

$$\partial_{\mathbf{v}}\mathbf{f} = \sum_{i=1}^{m} v^i\partial_i(\mathbf{f}\circ\mathbf{g}).$$

Mostre que esta definição não depende da escolha da parametrização.

9. Define-se a *primeira forma fundamental* $g: T_{\mathbf{x}}M\times T_{\mathbf{x}}M\to\mathbb{R}$ através de

$$g(\mathbf{v},\mathbf{w}) = \mathbf{v}\cdot\mathbf{w},$$

e a *segunda forma fundamental* $b: T_{\mathbf{x}}M\times T_{\mathbf{x}}M\to\mathbb{R}$ mediante

$$b(\mathbf{v},\mathbf{w}) = -\mathbf{w}\cdot\partial_{\mathbf{v}}\mathbf{n}.$$

Mostre que escrevendo

$$\mathbf{v} = \sum_{i=1}^{2} v^i\partial_i\mathbf{g};$$

$$\mathbf{w} = \sum_{i=1}^{2} w^i\partial_i\mathbf{g},$$

se tem

$$g(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = \sum_{i,j=1}^{2} g_{ij} v^i w^j;$$

$$b(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = \sum_{i,j=1}^{2} b_{ij} v^i w^j.$$

Conclua que g e b são de facto formas quadráticas (i.e., tensores simétricos). Estes tensores são também conhecidos como o *tensor da métrica* e o *tensor de curvatura extrínseca*.

10. Mostre que a condição para uma curva ser uma geodésica pode ser escrita como

$$\partial_{\mathbf{t}} \mathbf{t} = \lambda \mathbf{n},$$

em cada ponto da curva, onde $\mathbf{t}$ é o vector tangente unitário à curva. Note que $|\lambda|$ é a curvatura da geodésica.

11. Mostre que

$$|b(\mathbf{t}, \mathbf{t})|$$

é a curvatura da geodésica de vector tangente $\mathbf{t}$. Mostre que os vectores próprios de (b_{ij}) correspondem às geodésicas de curvatura máxima e mínima (ditas as *curvaturas principais de* S), e que estas são exactamente os módulos dos valores próprios correspondentes. Conclua que o módulo da curvatura é o produto das curvaturas principais. (Isto mostra que o módulo da curvatura não depende da escolha da parametrização).

12. Mostre que se S tem curvatura positiva em $\mathbf{x}_0$ então existe uma vizinhança de $\mathbf{x}_0$ na qual todos os pontos de M estão do mesmo lado do plano tangente, e que se S tem curvatura negativa em $\mathbf{x}_0$ então em qualquer vizinhança de $\mathbf{x}_0$ existem pontos de M dos dois lados do plano tangente. (Isto mostra que o sinal da curvatura não depende da escolha da parametrização).

13. Calcule a curvatura de uma superfície cilíndrica, de uma superfície cónica, de uma superfície esférica de raio $r > 0$ e da superfície de um toro de raios $R > r > 0$ (esta última apenas nos pontos de intersecção das geodésicas que determinou em 3).

14. As *componentes do tensor de curvatura de Riemann* são dadas pela fórmula

$$R_{ijkl} = \left[\partial_i \left(\partial_j \partial_k \mathbf{g} \right)^\top - \partial_j \left(\partial_i \partial_k \mathbf{g} \right)^\top \right] \cdot \partial_l \mathbf{g},$$

onde $^\top$ designa a projecção no espaço tangente a S. Mostre que

$$R_{ijkl} = b_{il} b_{jk} - b_{ik} b_{jl}.$$