Análise Matemática III - Turma Especial

Ficha 3

A entregar até à aula prática de sexta-feira dia 18 de Outubro

1. Para cada um dos seguintes conjuntos $M \subset \mathbb{R}^n$, indique se M é ou não uma variedade. Caso não seja, indique um subconjunto maximal de M que seja variedade e contenha o ponto $\mathbf{x}$ indicado. Em qualquer dos casos, indique a dimensão m da variedade escreva a equação do plano m-dimensional tangente a M no ponto $\mathbf{x}$.

   (a) $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = |x| \text{ e } |x| \leq 2\}$, $\mathbf{x} = (1, 1)$;

   (b) $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + z^2 = 25 \text{ e } x^2 - 2xy + y^2 = 0\}$, $\mathbf{x} = (3, 3, 4)$;

   (c) $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 - z^2 = 0\}$, $\mathbf{x} = (3, 4, 5)$;

   (d) $M = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : x^2 + y^2 - z^2 - w^2 + 1 = 0\}$, $\mathbf{x} = (1, 0, 1, 1)$.

2. (a) Prove o Teorema de Weierstrass: se $K \subset \mathbb{R}^n$ é compacto (i.e., limitado e fechado) e $f : K \to \mathbb{R}$ é contínua então f tem máximo e mínimo em K.

   (b) Determine o máximo e o mínimo da função contínua $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ dada por $f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^t A\mathbf{x}$ no compacto $K = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \|\mathbf{x}\| \leq 1\}$, onde A é uma matriz $n \times n$ simétrica.

3. Dados n números reais não negativos $x_1, x_2, \ldots, x_n$, define-se a sua *média aritmética* como sendo o número real $\frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \ldots + x_n)$ e a sua *média geométrica* como sendo o número real $(x_1 x_2 \ldots x_n)^{\frac{1}{n}}$. Mostre que a média aritmética é sempre maior ou igual que a média geométrica, e que as duas são iguais *sse* $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$.

   Não precisam de entregar:

4. Dê um exemplo de uma variedade M de dimensão 1 em $\mathbb{R}^2$ para a qual não existe nenhuma função $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe C^1 tal que $M = F^{-1}(0)$.

5. O espaço vectorial $M_3(\mathbb{R})$ das matrizes 3×3 de entradas reais pode ser identificado com $\mathbb{R}^9$ de forma natural. Considere o subconjunto de $\mathbb{R}^9$

$$O(3) = \{A \in M_3(\mathbb{R}) : A^t A = I\}$$

   formado pelas matrizes 3×3 ortogonais.

   (a) Mostre que $O(3)$ é uma variedade de dimensão 3 e classe C^∞ compacta[1].

   (b) Mostre que $T_I O(3) = \{A \in M_3(\mathbb{R}) : A^t + A = 0\}$.

   (c) Mostre que $O(3)$ com a operação produto de matrizes é um grupo não comutativo[2].

[1] Uma variedade diz-se compacta se é um subconjunto compacto de $\mathbb{R}^n$.

[2] Portanto O(3) é uma variedade com estrutura de grupo (*grupo de Lie*).

6. **(Critério de segunda ordem):** Seja M uma variedade de dimensão m e classe C^2 em $\mathbb{R}^n$, $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^2 e $\mathbf{x}_0 \in M$ tal que a restrição de f a M possui um mínimo em $\mathbf{x}_0$. Seja $U \ni \mathbf{x}_0$ um aberto e $\mathbf{F} : U \to \mathbb{R}^{n-m}$ tais que

$$M \cap U = \{\mathbf{x} \in U : \mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}\}.$$

Sejam $\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-m} \in \mathbb{R}$ tais que a função $g : U \to \mathbb{R}$ dada por

$$g(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) + \lambda_1 F^1(\mathbf{x}) + \ldots + \lambda_{n-m} F^{n-m}(\mathbf{x})$$

satisfaz $\nabla g(\mathbf{x_0}) = \mathbf{0}$. Mostre a forma quadrática definida pela matriz Hessiana $Hg(\mathbf{x}_0)$ é necessariamente semidefinida positiva quando restrita a $T_{\mathbf{x}_0}M$.