Análise Matemática III - Turma Especial

Ficha 2

A entregar até à aula prática de sexta-feira dia 11 de Outubro

1. Considere a função $\mathbf{f} : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ (onde $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 + xy > 0\}$) dada por

$$\mathbf{f}(x, y) = (x - y + \log(1 + xy), 1 + x + y - x^2y^2).$$

   (a) Mostre que $\mathbf{f}$ tem uma inversa local de classe C^∞ numa vizinhança de $(0, 0)$. Designando essa inversa por $\mathbf{g}$, calcule $D\mathbf{g}(0, 1)$.

   (b) Mostre que o subconjunto de $\mathbb{R}^4$ definido por $(zw, z+w) = \mathbf{f}(x, y)$ é dado pelo gráfico de uma função $(x, y) = \mathbf{h}(z, w)$ de classe C^∞ numa vizinhança do ponto $(0, 0, 0, 1)$. Calcule $D\mathbf{h}(0, 1)$.

2. Demonstre o Teorema da Função Inversa a partir do Teorema da Função Implícita.

3. O estado de um sistema termodinâmico é dado pelos valores da sua energia interna E e do seu volume V. O sistema é definido pela sua *relação fundamental*

$$S = S(E, V)$$

   onde S é a entropia[1].

   (a) Dê uma condição suficiente para que a relação fundamental se possa escrever na forma $E = E(S, V)$ numa vizinhança de um determinado estado (E_0, V_0).

   (b) Suponha que a condição que deu em (a) se verifica. A temperatura T e a pressão P do sistema são definidas por

$$T = \frac{\partial E}{\partial S}, \qquad P = -\frac{\partial E}{\partial V}.$$

   Exprima T e P em termos de derivadas parciais de S.

   (c) Dê uma condição sobre a função S para que o estado do sistema possa ser descrito pelos valores de (T, P) numa vizinhança do estado (E_0, V_0).

4. Use a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{2} + x^2 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

   para mostrar que a hipótese de f ser C^1 não pode ser omitida nas hipóteses do Teorema da Função Inversa.

[1] A relação fundamental é obtida a partir da **equação de Boltzmann** $S = k \log \Omega$, onde k é uma constante e $\Omega(E, V)$ é o número de estados microscópicos correspondentes aos mesmos valores de (E, V).

Não precisam de entregar:

5. Seja D um conjunto aberto, $\mathbf{x}_0 \in D$ e $\mathbf{f} : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ uma função diferenciável em $\mathbf{x}_0$.

   (a) Mostre que se $\mathbf{f}$ possui inversa local numa vizinhança de $\mathbf{x}_0$ diferenciável em $\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)$ então $m = n$.

   (b) Mostre que se $m \geq n$, $\mathbf{f}$ é de classe C^1 e $D\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)$ possui característica máxima então existe um aberto $U \subset D$ contendo $\mathbf{x}_0$ no qual $\mathbf{f}$ é injectiva.

   (c) Mostre que se $m \leq n$, $\mathbf{f}$ é de classe C^1 e $D\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)$ possui característica máxima então existe um aberto $U \subset D$ contendo $\mathbf{x}_0$ cuja imagem por $\mathbf{f}$ é aberta.