Análise Matemática III - Turma Especial

Ficha 11

A entregar até à aula prática de sexta-feira dia 13 de Dezembro

1. Neste exercício não pode usar formas diferenciais. Um aberto limitado $E \subset \mathbb{R}^n$ diz-se uma *região elementar* se existem abertos $U_i \subset \mathbb{R}^{n-1}$ e funções de classe C^∞ $\Phi_i^\pm : U_i \to \mathbb{R}$ tais que U_i é a projecção de E no plano $x^i = 0$ e os pontos do conjunto E são exactamente os pontos que satisfazem

$$\Phi_i^-(x^1, \ldots, x^{i-1}, x^{i+1}, \ldots, x^n) < x^i < \Phi_i^+(x^1, \ldots, x^{i-1}, x^{i+1}, \ldots, x^n)$$

para todo o $i = 1, \ldots, n$.

   (a) Prove o Teorema de Green para regiões elementares $E \subset \mathbb{R}^2$. (**Sugestão:** *Decomponha o campo vectorial numa soma de campos com todas as componentes nulas excepto uma*).

   (b) Mostre que o Teorema de Green é equivalente ao Teorema da Divergência em $\mathbb{R}^2$.

   (c) Prove o Teorema da Divergência para regiões elementares $E \subset \mathbb{R}^3$. (**Sugestão:** *Decomponha o campo vectorial numa soma de campos com todas as componentes nulas excepto uma*).

   (d) Usando o Teorema de Green, prove o Teorema de Stokes para campos vectoriais em variedades-2 que são gráficos de funções $z = f(x, y)$ definidas em regiões elementares $E \subset \mathbb{R}^2$.

2. Sejam $U, V \subset \mathbb{R}^n$ abertos. Recorde que uma aplicação $\mathbf{g} : U \to V$ se diz um *difeomorfismo* se é bijectiva, diferenciável e com inversa diferenciável. U e V dizem-se C^q*-difeomorfos* se existe um difeomorfismo $\mathbf{g} : U \to V$ de classe C^q.

   (a) Mostre que se U, V são C^∞-difeomorfos então $\omega \in \Omega^k(V)$ é fechada/exacta *sse* $\mathbf{g}^*\omega \in \Omega^k(U)$ é fechada/exacta.

   (b) Mostre que $\mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$ não é difeomorfo a $\mathbb{R}^n$. (**Sugestão:** *Considere a forma* $\Omega_{\mathbf{F}}$*, onde* $\mathbf{F} : \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\} \to \mathbb{R}^n$ *é um campo vectorial da forma*

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|^d}$$

   para $d \in \mathbb{R}$ *conveniente*).

3. Seja $\mathbf{g} : \mathbb{R}^+ \times]0, \pi[\times]0, 2\pi[\to \mathbb{R}^3$ a habitual transformação de coordenadas associada às coordenadas esféricas,

$$\mathbf{g}(r, \theta, \varphi) = (r \operatorname{sen} \theta \cos \varphi, r \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \varphi, r \cos \theta).$$

(a) Verifique que

$$(g_{ij}) = (\partial_i \mathbf{g} \cdot \partial_j \mathbf{g}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 \operatorname{sen}^2 \theta \end{pmatrix}.$$

Portanto $\{\partial_r \mathbf{g}, \partial_\theta \mathbf{g}, \partial_\varphi \mathbf{g}\}$ é uma base ortogonal.

(b) Verifique que

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_r &= \partial_r \mathbf{g} \sim dr \sim r^2 \operatorname{sen} \theta d\theta \wedge d\varphi \\ \mathbf{e}_\theta &= \frac{1}{r} \partial_\theta \mathbf{g} \sim r d\theta \sim r \operatorname{sen} \theta d\varphi \wedge dr \\ \mathbf{e}_\varphi &= \frac{1}{r \operatorname{sen} \theta} \partial_\varphi \mathbf{g} \sim r \operatorname{sen} \theta d\varphi \sim r dr \wedge d\theta \end{aligned}$$

e que

$$dV_3 = r^2 \operatorname{sen} \theta dr \wedge d\theta \wedge d\varphi.$$

(c) Escreva o *Laplaciano* da função f, $\nabla^2 f = \nabla \cdot \nabla f$, em coordenadas esféricas.

(d) Determine todas a soluções da *equação de Laplace*, $\nabla^2 f = 0$, que só dependem da coordenada radial r.

(e) O campo eléctrico gerado por uma carga pontual é da forma $\mathbf{E} = E(r, \theta, \varphi) \mathbf{e}_r$, e deve satisfazer as equações de Maxwell no vácuo, $\nabla \times \mathbf{E} = \mathbf{0}$ e $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$. Determine a expressão geral de $E(r, \theta, \varphi)$.

(f) O campo de velocidades de um fluido é da forma $\mathbf{u} = u(r, \theta, \varphi) \mathbf{e}_\theta$, e deve satisfazer as equações $\nabla \times \mathbf{u} = \mathbf{0}$ e $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$. Determine a expressão geral de $u(r, \theta, \varphi)$.

Não precisam de entregar:

4. Seja $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0), (0,1)\}$. Indique todos os valores possíveis de $\oint_C \omega$, onde

$$\omega = \left(-\frac{3y}{x^2 + y^2} + \frac{5(y-1)}{x^2 + (y-1)^2} \right) dx + \left(\frac{3x}{x^2 + y^2} - \frac{5x}{x^2 + (y-1)^2} \right) dy \in \Omega^1(U)$$

e $C \subset U$ é uma variedade-1 compacta.

5. O campo de velocidades de um fluido é da forma $\mathbf{u} = u(r, \theta, z) \mathbf{e}_\theta$, onde (r, θ, z) são coordenadas cilíndricas em $\mathbb{R}^3$, e deve satisfazer as equações de $\nabla \times \mathbf{u} = \mathbf{0}$ e $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$. Determine a expressão geral de $u(r, \theta, z)$.

6. Dado um campo eléctrico $\mathbf{E} = E^1 \mathbf{e}_1 + E^2 \mathbf{e}_2 + E^3 \mathbf{e}_3$ e um campo magnético $\mathbf{B} = B^1 \mathbf{e}_1 + B^2 \mathbf{e}_2 + B^3 \mathbf{e}_3$ dependentes do tempo t, define-se em $\mathbb{R}^4$ com coordenadas (t, x, y, z) a forma-2

$$F = E^1 dx \wedge dt + E^2 dy \wedge dt + E^3 dz \wedge dt + B^1 dy \wedge dz + B^2 dz \wedge dx + B^3 dx \wedge dy$$

(dita o *tensor de Faraday*). Mostre que F é fechada *sse* $\mathbf{E}$ e $\mathbf{B}$ satisfazem as *equações de Maxwell homogéneas* $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$, $\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$.