Análise Matemática III - Turma Especial

Demonstração do Teorema de Heine-Borel

Teorema de Heine-Borel: $K \subset \mathbb{R}^n$ é compacto *sse* toda a cobertura aberta de K admite uma subcobertura finita.

$\Rightarrow$

1. Demonstração seguindo a sugestão:

   Seja K compacto e $\mathcal{O}$ uma cobertura aberta de K. Começamos por mostrar que é sempre possível extrair uma subcobertura numerável de $\mathcal{O}$. Para cada $\mathbf{x} \in K$ existe $U \in \mathcal{O}$ tal que $\mathbf{x} \in U$. Como U é aberto, existe $\varepsilon > 0$ tal que $B_\varepsilon(\mathbf{x}) \subset U$. Como $\mathbb{Q}^n$ é denso em $\mathbb{R}^n$, existe $\mathbf{q} \in B_{\frac{\varepsilon}{3}}(\mathbf{x}) \cap \mathbb{Q}^n$. Tomando $r \in \left]\frac{\varepsilon}{3}, \frac{2\varepsilon}{3}\right[\cap \mathbb{Q}$, vemos que $\mathbf{x} \in B_r(\mathbf{q}) \subset U$. Por outras palavras, cada ponto de K pertence a uma bola de centro em $\mathbb{Q}^n$ e raio racional contida nalgum aberto da cobertura. Para cada $\mathbf{q} \in \mathbb{Q}^n$ e $r \in \mathbb{Q}$ escolhemos um aberto $U_{(\mathbf{q},r)} \in \mathcal{O}$ tal que $B_r(\mathbf{q}) \subset U_{(\mathbf{q},r)}$, caso seja possível. A família $\left\{U_{(\mathbf{q},r)}\right\}$ é uma subcobertura numerável de $\mathcal{O}$. (*Note-se que o argumento acima não depende do facto de K ser compacto*).

   Seja então $\{U_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ uma subcobertura numerável de $\mathcal{O}$. Defina-se

   $$C_k = K \setminus \bigcup_{i=1}^{k} U_i.$$

   Cada C_k é compacto e $\{U_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ admite uma subcobertura finita *sse* $C_k = \varnothing$ a partir de certa ordem. Portanto se $\{U_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ não admitisse nenhuma subcobertura finita seria possível escolher $\mathbf{x}_k \in C_k$ para todo o $k \in \mathbb{N}$. Como $\mathbf{x}_k \in K$ e K é compacto, existiria pelo menos um sublimite $\mathbf{x} \in K$. Como $C_{k+1} \subset C_k$, terámos $\mathbf{x}_k \in C_l$ para $k \geq l$, e portanto $\mathbf{x} \in C_k$ para todo o $k \in \mathbb{N}$. Mas então $\mathbf{x} \notin U_k$ para todo o $k \in \mathbb{N}$, em contradição com o facto de $\{U_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ ser uma cobertura de K. Concluimos que $\{U_k\}_{k\in\mathbb{N}}$, e portanto $\mathcal{O}$, admite uma subcobertura finita.

2. Demonstração com intervalos encaixados:

   Seja K compacto e $\mathcal{O}$ uma cobertura aberta de K, e suponhamos que $\mathcal{O}$ não admite qualquer subcobertura finita. Como K é limitado, está contido nalgum cubo compacto $I \subset \mathbb{R}^n$. Dividindo cada aresta de I em dois, dividimos I em 2^n subcubos compactos. Existe pelo menos um destes subcubos I_1 tal que $K \cap I_1$ não é coberto por finitos abertos de $\mathcal{O}$ (caso contrário K seria coberto por finitos abertos de $\mathcal{O}$). Iterando o processo de divisão de arestas e escolha de um subcubo que não é coberto por finitos abertos de $\mathcal{O}$, obtemos uma sucessão de cubos encaixados $I \supset I_1 \supset I_2 \supset \ldots$ que não podem ser cobertos por finitos abertos de $\mathcal{O}$ e cuja aresta é metade da aresta do cubo precedente. Pelo princípio do encaixe, existe $\mathbf{x} \in K$ tal que

   $$\bigcap_{k=1}^{+\infty} I_k = \{\mathbf{x}\}.$$

Como $\mathcal{O}$ é uma cobertura aberta de K, existe $U \in \mathcal{O}$ tal que $\mathbf{x} \in U$. Como U é aberto, existe $\varepsilon > 0$ tal que $\mathbf{x} \in B_\varepsilon(\mathbf{x}) \subset U$, e portanto para

$$\sqrt{n}\frac{l}{2^k} < \varepsilon$$

(onde l é a aresta de I) teremos $I_k \subset U$, em contradição com o facto de I_k não poder ser coberto por finitos abertos de $\mathcal{O}$.

3. Demonstração do Leonardo (corrigida):

   Seja K compacto e $\mathcal{O}$ uma cobertura aberta de K, e suponhamos que $\mathcal{O}$ não admite qualquer subcobertura finita. Como K é limitado, para cada $k \in \mathbb{N}$ existe uma cobertura finita de K por bolas abertas de raio $\frac{1}{k}$. Pelo menos uma destas bolas, B_k, deve ser tal que $K \cap B_k$ não pode ser coberto por finitos abertos da cobertura. Tome-se $\mathbf{x}_k \in K \cap B_k$. Como K é compacto, esta sucessão possui pelo menos um sublimite $\mathbf{x} \in K$. Como $\mathcal{O}$ é uma cobertura aberta de K, existe $U \in \mathcal{O}$ e $\varepsilon > 0$ tais que $B_\varepsilon(\mathbf{x}) \subset U$. Escolha-se $p \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{3}{p} < \varepsilon$. Existe certamente $k > p$ tal que $\mathbf{x}_k \in B_{\frac{1}{p}}(\mathbf{x})$. Mas então

   $$\mathbf{y} \in B_k \Rightarrow \|\mathbf{y} - \mathbf{x}\| \leq \|\mathbf{y} - \mathbf{x}_k\| + \|\mathbf{x}_k - \mathbf{x}\| < \frac{2}{k} + \frac{1}{p} < \frac{3}{p} < \varepsilon$$

   e portanto $B_k \subset B_\varepsilon(\mathbf{x}) \subset U$, em contradição com o facto de $K \cap B_k$ não poder ser coberto por finitos abertos da partição.

4. Demonstração do Jorge (adaptada):

   Seja K compacto e $\mathcal{O}$ uma cobertura aberta de K. Para cada $\mathbf{x} \in K$ definimos $r(\mathbf{x}) = 1$ se existe algum aberto $U \in \mathcal{O}$ tal que $B_1(\mathbf{x}) \subset U$, e

   $$r(\mathbf{x}) = \sup\{\varepsilon > 0 : B_\varepsilon(\mathbf{x}) \subset U \text{ para algum } U \in \mathcal{O}\}$$

   caso contrário. A função $r : K \to \mathbb{R}^+$ é contínua (porquê?), e portanto possui mínimo $2\delta \in \mathbb{R}^+$ em K. Concluimos que para todo o $\mathbf{x} \in K$ existe $U \in \mathcal{O}$ tal que $B_\delta(\mathbf{x}) \subset U$. Basta-nos portanto mostrar que qualquer cobertura de K por bolas abertas de raio $\delta > 0$ admite uma subcobertura finita. Escolha-se $\mathbf{x}_1 \in K$, $B_1 \ni \mathbf{x}_1$ uma bola de raio δ da cobertura. Se $K \setminus B_1 \neq \varnothing$, escolhemos $\mathbf{x}_2 \in K \setminus B_1$ e $B_2 \ni \mathbf{x}_2$ na cobertura. Se a cobertura por bolas abertas não admite qualquer subcobertura finita, podemos iterar este processo para obter uma sucessão $\mathbf{x}_k$ de termos em K e uma sucessão B_k de bolas abertas da cobertura tais que

   $$\mathbf{x}_k \in B_k, \qquad \mathbf{x}_k \notin \bigcup_{i=1}^{k-1} B_i.$$

   Como K é compacto, $\mathbf{x}_k$ possui uma subsucessão convergente para $\mathbf{x} \in K$, que supomos sem perda de generalidade ser a própria sucessão $\mathbf{x}_k$. Tomando $N \in \mathbb{N}$ tal que $\mathbf{x}_k \in B_{\frac{\delta}{2}}(\mathbf{x})$ para $k > N$, chegamos a uma contradição (qual?).

$\Leftarrow$

1. Seja $K \subset \mathbb{R}^n$ tal que qualquer cobertura aberta de K admite uma subcobertura finita. $\{B_k(\mathbf{0})\}_{k \in \mathbb{N}}$ é uma cobertura aberta de $\mathbb{R}^n$, e portanto de K. Logo admite uma subcobertura finita. Sendo $N \in \mathbb{N}$ o índice máximo desta subcobertura finita, é claro que

$K \subset B_N(\mathbf{0})$, e portanto K é limitado. Se $\mathbf{x} \notin K$, a família $\left\{\mathbb{R}^n \setminus \overline{B}_{\frac{1}{k}}(\mathbf{x})\right\}_{k\in\mathbb{N}}$ é uma cobertura aberta de K (uma vez que cobre $\mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{x}\}$), e portanto admite uma subcobertura finita. Sendo $N \in \mathbb{N}$ o índice máximo desta subcobertura finita, é claro que $K \subset \mathbb{R}^n \setminus \overline{B}_{\frac{1}{N}}(\mathbf{x})$, e portanto $B_{\frac{1}{N}}(\mathbf{x}) \cap K = \varnothing$. Concluimos que $\mathbf{x} \in \operatorname{ext}(K)$, pelo que $K \supset \partial K$.

2. Demonstração do Leonardo:

   Seja $K \subset \mathbb{R}^n$ tal que qualquer cobertura aberta de K admite uma subcobertura finita. Se K não fosse compacto, existiria uma sucessão $\mathbf{x}_k$ de pontos de K sem pontos de acumulação em K; o conjunto X dos termos de tal sucessão seria necessariamente infinito (porquê?). Portanto para cada $\mathbf{x} \in K$ existiria $\varepsilon(\mathbf{x})$ tal que $X \cap B_{\varepsilon(\mathbf{x})}(\mathbf{x})$ seria finito.

   A família $\left\{B_{\varepsilon(\mathbf{x})}(\mathbf{x})\right\}_{\mathbf{x}\in K}$ é uma cobertura aberta de K, pelo que admite uma subcobertura finita $\{B_1, \ldots, B_N\}$. Mas então

$$X = \bigcup_{i=1}^{N} X \cap B_i$$

   seria finito.