Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

Análise Matemática III
2001/2002
Resolução Sumária do 1º Exame e 2º Teste

11 de Janeiro de 2002 – 17 horas

1º exame: todos os grupos. Duração: 3h
2º teste: grupos 4, 5 e 6. Duração: 1h30m

Apresente e justifique todos os cálculos relevantes

1. Considere o conjunto

$$M = \left\{(x, y, z) \in E^3 : z > 0,\, x + y^2 z + \log z = 0\right\}.$$

(1 val.) (a) Mostre que M é uma variedade e indique a sua dimensão.

Resolução: A matriz Jacobiana da função

$$F(x, y, z) = x + y^2 z + \log z,$$

cujo conjunto de nível $F^{-1}(0)$ é M, é dada por

$$DF = \left[\begin{array}{ccc} 1 & 2yz & y^2 + \frac{1}{z} \end{array}\right].$$

Uma vez que esta matriz linha nunca se anula, a sua característica é constante igual a 1 no domínio de diferenciabilidade de F. Logo M é variedade.

(1 val.) (b) Escreva a equação do plano tangente a M no ponto $(-1, 1, 1)$.

Resolução: Uma base para o espaço normal $T^{\perp}_{(-1,1,1)}M$ é a formada pelo vector

$$DF(-1, 1, 1) = \left[\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 2 \end{array}\right].$$

Consequentemente, a equação do plano tangente a M no ponto $(-1, 1, 1)$ é da forma

$$x + 2y + 2z = \alpha$$

para algum $\alpha \in \mathbb{R}$. Uma vez que o ponto $(-1, 1, 1)$ tem que pertencer ao plano, concluimos que $-1 + 2 + 2 = \alpha$, e portanto a equação pedida é

$$x + 2y + 2z = 3.$$

(1 val.) (c) Mostre que numa vizinhança do ponto $(-1, 1, 1)$, M é dada pelo gráfico de uma função $z = f(x, y)$, e calcule $\frac{\partial f}{\partial x}(-1, 1)$.

Resolução: Uma vez que

$$\frac{\partial F}{\partial z}(-1, 1, 1) = 2 \neq 0,$$

o Teorema da Função Implícita permite-nos concluir que numa vizinhança do ponto $(-1, 1, 1)$ M é dada pelo gráfico de uma função C^1 $z = f(x, y)$. A função f deve satisfazer numa vizinhança do ponto $(-1, 1)$

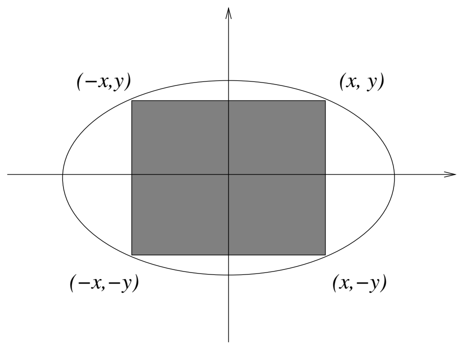
$$x + y^2 f(x, y) + \log f(x, y) = 0 \Rightarrow 1 + y^2 \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + \frac{1}{f(x, y)} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 0,$$

pelo no ponto $(-1,1)$ se obtém

$$1+\frac{\partial f}{\partial x}(-1,1)+\frac{\partial f}{\partial x}(-1,1)=0 \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(-1,1)=-\frac{1}{2}.$$

(uma vez que $f(-1,1)=1$).

(3 val.) **2.** Determine o maior valor possível para a área de um rectângulo inscrito elipse de equação $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ (ver figura).



Resolução: A área do rectângulo de centro na origem e vértice (x,y) com $x,y\geq 0$ é dada por

$$A(x,y)=4xy.$$

Pretendemos determinar o máximo desta função sujeita à restrição

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$

De acordo com a regra dos multiplicadores de Lagrange, devemos resolver o sistema

$$\begin{cases} \nabla\left(4xy+\lambda\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1\right)\right)=\mathbf{0} \\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4y+\frac{2\lambda}{a^2}x=0 \\ 4x+\frac{2\lambda}{b^2}y=0 \\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \end{cases}$$

Uma vez que $(0,0)$ não é um ponto da elipse, devemos ter

$$\det\begin{bmatrix} \frac{2\lambda}{a^2} & 4 \\ 4 & \frac{2\lambda}{b^2} \end{bmatrix}=0 \Leftrightarrow \lambda=\pm 2ab,$$

e portanto obtém-se da primeira equação

$$y=\mp\frac{b}{a}x.$$

Substituindo na equação da elipse vem

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{b^2x^2}{a^2b^2}=1 \Leftrightarrow x=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}a.$$

Obtemos portanto quatro possíveis pontos de extremo: $\left(\pm\frac{\sqrt{2}}{2}a, \pm\frac{\sqrt{2}}{2}b\right)$. Como a elipse é compacta e A é contínua, A possui máximo e mínimo ao longo da elipse. É fácil ver que os dois pontos nos quadrantes pares são pontos de mínimo, nos quais A vale $-2ab$, e os dois pontos nos quadrantes pares são pontos de máximo, nos quais A vale $2ab$. Logo o maior valor possível para a área de um rectângulo inscrito elipse é $2ab$.

3. Seja A o sólido

$$A = \left\{(x, y, z) \in E^3 : x^2 + y^2 \leq 1,\ x^2 + y^2 + z^2 \geq 1,\ z \in [-1, 1]\right\}$$

com densidade de massa constante igual a 1.

(2 val.) (a) Escreva uma expressão para a massa de A como um integral iterado da forma $\int(\int(\int dx)dy)dz$.

Resolução: Notando que para z fixo os pontos que pertencem a A são os compreendidos estão fora do círculo de raio $\sqrt{1-z^2}$ centrado na origem e dentro do círculo de raio 1 centrado na origem, temos

$$\begin{aligned} M = &\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{-\sqrt{1-z^2}}\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} dxdydz + \int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-z^2}}^{\sqrt{1-z^2}}\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{-\sqrt{1-y^2-z^2}} dxdydz \\ &+ \int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-z^2}}^{\sqrt{1-z^2}}\int_{\sqrt{1-y^2-z^2}}^{\sqrt{1-y^2}} dxdydz + \int_{-1}^{1}\int_{\sqrt{1-z^2}}^{1}\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} dxdydz. \end{aligned}$$

(2 val.) (b) Calcule o momento de inércia de A em relação ao eixo dos zz.

Resolução: Em coordenadas cilíndricas tem-se

$$\begin{aligned} I_z &= \int_{-1}^{1}\int_{\sqrt{1-z^2}}^{1}\int_{0}^{2\pi} r^2 r d\theta dr dz = 2\pi\int_{-1}^{1}\frac{1}{4}\left[1-\left(1-z^2\right)^2\right]dz \\ &= \frac{\pi}{2}\int_{-1}^{1}\left(2z^2 - z^4\right)dz = \frac{\pi}{2}\left(\frac{4}{3}-\frac{2}{5}\right) = \frac{7\pi}{15}. \end{aligned}$$

4. Considere a curva

$$C = \left\{\left(e^{-\theta}\cos\theta, e^{-\theta}\operatorname{sen}\theta\right) : \theta \in]0, +\infty[\right\}$$

e a 1-forma

$$\omega = e^x dx + e^y dy.$$

Calcule:

(1 val.) (a) O comprimento de C;

Resolução: Uma parametrização para C é $\mathbf{g} :]0, +\infty[\to E^2$ dada por

$$\mathbf{g}(\theta) = \left(e^{-\theta}\cos\theta, e^{-\theta}\operatorname{sen}\theta\right),$$

e satisfaz

$$\frac{d\mathbf{g}}{d\theta}(\theta) = -e^{-\theta}\left(\cos\theta, \operatorname{sen}\theta\right) + -e^{-\theta}\left(-\operatorname{sen}\theta, \cos\theta\right).$$

Portanto se dV_1 é um elemento de volume compatível com a orientação induzida por $\mathbf{g}$ tem-se

$$\mathbf{g}^* dV_1 = \left\| \frac{d\mathbf{g}}{d\theta}(\theta) \right\| d\theta = \sqrt{e^{-2\theta} + e^{-2\theta} + 2 \cdot 0}\ d\theta = \sqrt{2} e^{-\theta} d\theta$$

e

$$\begin{aligned} V_1(C) &= \int_C dV_1 = \int_0^{+\infty} \sqrt{2} e^{-\theta} d\theta = \sqrt{2} \lim_{n \to +\infty} \int_0^n e^{-\theta} d\theta \\ &= \sqrt{2} \lim_{n \to +\infty} \left(1 - e^{-n}\right) = \sqrt{2}. \end{aligned}$$

(2 val.) (b) O valor de $\int_C \omega$ com uma orientação à sua escolha.

Tem-se $d\omega = 0$; uma vez que o domínio de ω é E^2, ω é exacta. É fácil ver que por exemplo

$$f(x, y) = e^x + e^y$$

é um potencial para ω. Dado $h > 0$, seja C_h a curva

$$C_h = \left\{ \left(e^{-\theta} \cos\theta, e^{-\theta} \operatorname{sen}\theta \right) : \theta \in]0, +h[\right\}.$$

Pelo Teorema de Stokes, temos

$$\int_{C_h} \omega = f\left(e^{-h} \cos h, e^{-h} \operatorname{sen} h \right) - f(1, 0)$$

(onde a orientação é a induzida por $\mathbf{g}$). Pelo Teorema da Convergência Dominada é fácil ver que

$$\int_C \omega = \lim_{h \to +\infty} \int_{C_h} \omega.$$

Como f é contínua,

$$\begin{aligned} \int_C \omega &= \lim_{h \to +\infty} \left[f\left(e^{-h} \cos h, e^{-h} \operatorname{sen} h \right) - f(1, 0) \right] \\ &= f\left(\lim_{h \to +\infty} e^{-h} \cos h, \lim_{h \to +\infty} e^{-h} \operatorname{sen} h \right) - f(1, 0) \\ &= f(0, 0) - f(1, 0) = 1 + 1 - (e + 1) = 1 - e. \end{aligned}$$

5. Considere a superfície

$$S = \left\{ (x, y, z) \in E^3 : y = 4 - x^2 - z^2 ,\, 0 < y < 3 \right\}$$

e o campo vectorial

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (z^2, y, 2x - z).$$

Calcule o fluxo de $\mathbf{F}$ através de S, no sentido da normal unitária exterior ao sólido limitado por S e pelos planos $y = 0$ e $y = 3$,

(1 val.) (a) Usando o Teorema da Divergência;

Resolução: É fácil ver que $\nabla \cdot \mathbf{F} = 0$. A superfície S é um pedaço de um parabolóide cujo eixo é o eixo dos yy, e o seu bordo é constituído por uma circunferência C_1 de raio

2 contida no plano $y = 0$ e uma circunferência C_2 de raio 1 contida no plano $y = 3$. Para aplicar o Teorema da Divergência (que só pode ser aplicado a superfícies que limitam volumes), adicionamos a S os dois círculos D_1 e D_2 contidos nos planos $y = 0$ e $y = 3$ e cujos bordos são C_1 e C_2. A normal unitária indicada corresponde então à normal unitária exterior $\mathbf{n}$ ao volume V limitado por $D_1 \cup S \cup D_2$. Note-se que, em D_1, $\mathbf{n} = (0, -1, 0)$ e, em D_2, $\mathbf{n} = (0, 1, 0)$. Por outro lado, $\mathbf{F}(x, 0, z) = (z^2, 0, 2x - z)$ e $\mathbf{F}(x, 3, z) = (z^2, 3, 2x - z)$. Pelo Teorema da Divergência tem-se então

$$\int_{D_1} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, dV_2 + \int_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, dV_2 + \int_{D_2} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, dV_2 = \int_V \nabla \cdot \mathbf{F} \, dV_3 = 0,$$

ou seja,

$$\begin{aligned} \int_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, dV_2 &= -\int_{D_1} 0 dV_2 - \int_{D_2} 3 dV_2 \\ &= 3V_2(D_2). \end{aligned}$$

Como D_2 é um círculo de raio 1, $V_2(D_2) = \pi$, e portanto

$$\int_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, dV_2 = -3\pi.$$

(2 val.) (b) Pela definição de fluxo;

Resolução: Uma parametrização de S é por exemplo $\mathbf{g} :]1, 2[\times]0, 2\pi[\to E^3$ dada por

$$\mathbf{g}(r, \theta) = \left(r \cos \theta, 4 - r^2, r \operatorname{sen} \theta\right),$$

uma vez que em coordenadas cilíndricas (r, θ, y) a equação que define S se escreve $y = 4 - r^2$. Como

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial r} \times \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \theta} &= \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ \cos \theta & -2r & \operatorname{sen} \theta \\ -r \operatorname{sen} \theta & 0 & r \cos \theta \end{vmatrix} \\ &= \left(-2r^2 \cos \theta, -r, -2r^2 \operatorname{sen} \theta\right) \end{aligned}$$

aponta para dentro S, concluímos que $\mathbf{g}$ induz a orientação inversa da correspondente à normal exterior unitária. Portanto o fluxo de $\mathbf{F}$ para fora de S é

$$\begin{aligned} &\int_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, dV_2 = \\ &= -\int_1^2 \int_0^{2\pi} \left(r^2 \operatorname{sen}^2 \theta, 4 - r^2, 2r \cos \theta - r \operatorname{sen} \theta\right) \cdot \left(-2r^2 \cos \theta, -r, -2r^2 \operatorname{sen} \theta\right) d\theta dr \\ &= \int_1^2 \int_0^{2\pi} \left(2r^4 \operatorname{sen}^2 \theta \cos \theta + 4r - r^3 + 4r^3 \cos \theta \operatorname{sen} \theta - 2r^3 \operatorname{sen}^2 \theta\right) d\theta dr \\ &= 2\pi \int_1^2 (4r - r^3 - r^3) dr = -3\pi, \end{aligned}$$

concordando com o resultado da alínea anterior. Alternativamente, podemos considerar a 2-forma

$$\Omega_{\mathbf{F}} = z^2 dy \wedge dz + y dz \wedge dx + (2x - z) dx \wedge dy$$

e integrá-la ao longo de S. Uma vez que

$$\begin{aligned}
\mathbf{g}^*\Omega_{\mathbf{F}} &= \left(r^2\operatorname{sen}^2\theta\right) d\left(4-r^2\right)\wedge d\left(r\operatorname{sen}\theta\right)\\
&\quad+\left(4-r^2\right) d\left(r\operatorname{sen}\theta\right)\wedge d\left(r\cos\theta\right)\\
&\quad+\left(2r\cos\theta - r\operatorname{sen}\theta\right) d\left(r\cos\theta\right)\wedge d\left(4-r^2\right)\\
&= \left(-2r^4\operatorname{sen}^2\theta\cos\theta - 4r + r^3 - 4r^3\cos\theta\operatorname{sen}\theta + 2r^3\operatorname{sen}^2\theta\right) dr\wedge d\theta
\end{aligned}$$

temos que

$$\int_S \Omega_{\mathbf{F}} = 3\pi,$$

e uma vez que, como vimos, $\mathbf{g}$ induz a orientação inversa da correspondente à normal unitária exterior, o fluxo que nos é pedido é precisamente o simétrico do valor que obtivémos, *i.e.*, -3π. Caso não o tivéssemos ainda feito, poderíamos determinar qual a orientação induzida pela parametrização notando que uma base para o espaço normal a S no ponto (x, y, z) é dada por

$$\nabla\left(x^2+y+z^2-4\right) = (2x, 1, 2z).$$

Por exemplo no ponto $(2, 0, 0) = \mathbf{g}(2, 0)$ uma normal exterior (não unitária) é $\mathbf{N} = (4, 1, 0)$, e $\Omega_{\mathbf{N}} = 4dy\wedge dz + dz\wedge dx$. Uma vez que

$$\begin{aligned}
\mathbf{g}^*\Omega_{\mathbf{N}} &= 4d\left(4-r^2\right)\wedge d\left(r\operatorname{sen}\theta\right) + d\left(r\operatorname{sen}\theta\right)\wedge d\left(r\cos\theta\right)\\
&= -8r^2\cos\theta dr\wedge d\theta - r dr\wedge d\theta = -18 dr\wedge d\theta
\end{aligned}$$

para $(r, \theta) = (2, 0)$, e $-18 < 0$, concluiríamos que $\mathbf{g}$ induz a orientação inversa da da normal exterior.

(2 val.) (c) Usando o Teorema de Stokes.

Resolução: Note-se que $\nabla\cdot\mathbf{F} = 0$. Como $\mathbf{F}$ está definido em E^3, que é um conjunto em estrela, concluímos que $\mathbf{F}$ é um campo rotacional. Se $\mathbf{A}$ é um potencial vector para $\mathbf{F}$, i.e., se $\mathbf{F} = \nabla\times\mathbf{A}$, então devemos ter

$$\begin{aligned}
\Omega_{\mathbf{F}} = d\omega_{\mathbf{A}} \Leftrightarrow d\omega_{\mathbf{A}} &= z^2 dy\wedge dz + y dz\wedge dx + (2x-z) dx\wedge dy\\
&= d\left(yz^2 dz + x^2 dy\right) + y dz\wedge dx - z dx\wedge dy\\
&= d\left(yz^2 dz + x^2 dy + yz dx\right).
\end{aligned}$$

Portanto um potencial vector para $\mathbf{F}$ é então

$$\mathbf{A} = (yz, x^2, yz^2).$$

Pelo Teorema de Stokes,

$$\int_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\, dV_2 = \oint_{C_1}\mathbf{A}\cdot d\mathbf{g} + \oint_{C_2}\mathbf{A}\cdot d\mathbf{g}$$

onde as orientações de C_1 e C_2 devem ser compatíveis com a normal unitária $\mathbf{n}$. Mais precisamente, C_1 deve ser percorrida no sentido directo quando vista do semieixo positivo dos yy, e C_2 no sentido inverso. Uma parametrização para C_1 é $\mathbf{g}(\theta) = (2\operatorname{sen}\theta, 0, 2\cos\theta)$, e portanto

$$\oint_{C_1}\mathbf{A}\cdot d\mathbf{g} = \int_0^{2\pi}(0, 4\operatorname{sen}^2\theta, 0)\cdot(2\cos\theta, 0, -2\operatorname{sen}\theta)\, d\theta = 0.$$

Uma parametrização para C_2 é $\mathbf{g}(\theta) = (\operatorname{sen}\theta, 3, \cos\theta)$; o sentido de C_2 correspondente a esta parametrização é no entanto o contrário àquele que pretendemos, pelo que

$$\begin{aligned}\oint_{C_2} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{g} &= -\int_0^{2\pi} \left(3\cos\theta, \operatorname{sen}^2\theta, 3\cos^2\theta\right) \cdot (\cos\theta, 0, -\operatorname{sen}\theta)\, d\theta \\ &= -\int_0^{2\pi} \left(3\cos^2\theta - 3\cos^2\theta \operatorname{sen}\theta\right) d\theta = -3\pi.\end{aligned}$$

Portanto mais uma vez concluímos que

$$\int_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, dV_2 = -3\pi.$$

(2 val.) **6.** Seja A uma n-variedade com bordo em E^n e $u : E^n \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^2 tal que

$$\begin{cases} \nabla^2 u = 0 \text{ em int}\, A \\ u(\mathbf{x}) = 0 \text{ para } \mathbf{x} \in \partial A \end{cases}$$

Mostre que então $u \equiv 0$. (**Sugestão:** *Comece por mostrar que* $(\nabla u)^2 = \nabla \cdot (u \nabla u) - u\nabla^2 u$).

Resolução: Seguindo a sugestão, começamos por ver que

$$\nabla \cdot (u\nabla u) = (\nabla u) \cdot (\nabla u) + u\nabla \cdot (\nabla u) = (\nabla u)^2 + u\nabla^2 u,$$

ou seja,

$$(\nabla u)^2 = \nabla \cdot (u\nabla u) - u\nabla^2 u.$$

Se u satisfaz a equação de Laplace $\nabla^2 u = 0$, temos

$$(\nabla u)^2 = \nabla \cdot (u\nabla u).$$

Integrando esta igualdade em A e usando o Teorema da Divergência, tem-se

$$\int_A (\nabla u)^2 dV_n = \int_A \nabla \cdot (u\nabla u) dV_n = \int_{\partial A} (u\nabla u) \cdot \mathbf{n} dV_{n-1} = 0,$$

uma vez que $u(\mathbf{x}) = 0$ para $\mathbf{x} \in \partial A$ ($\mathbf{n}$ designa a normal exterior a A). Uma vez que u é de classe C^2, o vector ∇u é contínuo. Portanto a função $(\nabla u)^2$ é contínua e positiva. Segue-se que $(\nabla u)^2 = 0$ em int$A$: de facto, se existisse $\mathbf{x}_0 \in$ int$A$ tal que $(\nabla u)^2(\mathbf{x}_0) = \varepsilon > 0$, teríamos por continuidade (e por ser int$A$ aberto) que existiria uma bola aberta $B \subset$ int$A$ centrada em $\mathbf{x}_0$ na qual $(\nabla u)^2 > \frac{\varepsilon}{2}$, e portanto seria

$$\int_A (\nabla u)^2 dV_n \geq \int_B (\nabla u)^2 dV_n > \frac{\varepsilon}{2} V_n(B) > 0,$$

o que constitui uma contradição. Portanto $\nabla u = \mathbf{0}$ em int$A$, e por continuidade podemos ainda concluir que $\nabla u = \mathbf{0}$ em ∂A. Consequentemente u é constante em A; uma vez que $u = 0$ em ∂A, concluímos finalmente que $u = 0$ em A.