Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

Análise Matemática III

2001/2002

1º Exame e 2º Teste

11 de Janeiro de 2002 – 17 horas

1º exame: todos os grupos. Duração: 3h
2º teste: grupos 4, 5 e 6. Duração: 1h30m

Apresente e justifique todos os cálculos relevantes

1. Considere o conjunto

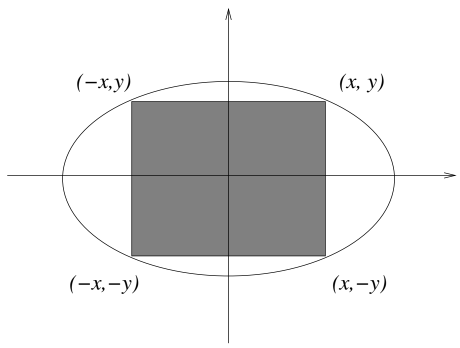
$$M = \left\{(x, y, z) \in E^3 : z > 0,\, x + y^2 z + \log z = 0\right\}.$$

(1 val.) (a) Mostre que M é uma variedade e indique a sua dimensão.

(1 val.) (b) Escreva a equação do plano tangente a M no ponto $(-1, 1, 1)$.

(1 val.) (c) Mostre que numa vizinhança do ponto $(-1, 1, 1)$, M é dada pelo gráfico de uma função $z = f(x, y)$, e calcule $\frac{\partial f}{\partial x}(-1, 1)$.

(3 val.) **2.** Determine o maior valor possível para a área de um rectângulo inscrito elipse de equação $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ (ver figura).



3. Seja A o sólido

$$A = \left\{(x, y, z) \in E^3 : x^2 + y^2 \leq 1,\, x^2 + y^2 + z^2 \geq 1,\, z \in [-1, 1]\right\}$$

com densidade de massa constante igual a 1.

(2 val.) (a) Escreva uma expressão para a massa de A como um integral iterado da forma $\int(\int(\int dx)dy)dz$.

(2 val.) (b) Calcule o momento de inércia de A em relação ao eixo dos zz.

Volte S. F. F.

Início do 2º Teste

4. Considere a curva

$$C = \left\{ \left(e^{-\theta}\cos\theta, e^{-\theta}\operatorname{sen}\theta \right) : \theta \in]0, +\infty[\right\}$$

e a 1-forma

$$\omega = e^x dx + e^y dy.$$

Calcule:

(1 val.) (a) O comprimento de C;

(2 val.) (b) O valor de $\int_C \omega$ com uma orientação à sua escolha.

Justifique cuidadosamente as suas respostas.

5. Considere a superfície

$$S = \left\{ (x, y, z) \in E^3 : y = 4 - x^2 - z^2 \,,\, 0 < y < 3 \right\}$$

e o campo vectorial

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (z^2, y, 2x - z).$$

Calcule o fluxo de $\mathbf{F}$ através de S, no sentido da normal unitária exterior ao sólido limitado por S e pelos planos $y = 0$ e $y = 3$,

(1 val.) (a) Usando o Teorema da Divergência;

(2 val.) (b) Pela definição de fluxo;

(2 val.) (c) Usando o Teorema de Stokes.

(2 val.) **6.** Seja A uma n-variedade com bordo em E^n e $u : E^n \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^2 tal que

$$\begin{cases} \nabla^2 u = 0 \text{ em int } A \\ u(\mathbf{x}) = 0 \text{ para } \mathbf{x} \in \partial A \end{cases}$$

Mostre que então $u \equiv 0$. (**Sugestão:** *Comece por mostrar que* $(\nabla u)^2 = \nabla \cdot (u \nabla u) - u\nabla^2 u$).